OPERACIONA ISTRAŽIVANJA
-ispitna pitanja, šk.2010/11-

1. Koji ekonomski problemi mogu biti predmet modeliranja korišćenjem metoda LP
2. Postupak korišćenja modela operacionih istraživanja u procesu poslovnog odlučivanja
3. Objasniti opšti oblik modela matematičkog programiranja
4. Objasniti osnovne pretpostavke modela LP
5. Koje su karakteristike standardnog problema maksimuma
6. Zašto se u model LP uvode dodatne promenljive i koje je njihovo ekonomsko značenje
7. Koje su osnovne karakteristike skupa mogućih rešenja
8. Dokazati da je skup mogućih rešenja konveksan skup
9. Koje rešenje modela LP predstavlja bazično a koje optimalno rešenje
10. Dokazati da se optimalno rešenje zadataka standardnog problema maksimuma nalazi u jednoj od ekstremnih tačaka skupa mogućih rešenja
11. Kada se primenjuje grafički metod određivanja rešenja u modelu LP i koji je postupak njegove primene
12. Simpleks metod-objasniti osnovne karakteristike metoda, uporediti ga sa grafičkim metodom i objasniti simpleks kriterijume za promenu vektorske baze
13. Izvesti simpleks kriterijum za promenu vektorske baze kod standardnog problema maksimuma
14. Koje su osnovne karakteristike mešovitog problema maksimuma-objasniti razliku između standardnog i mešovitog problema maksimuma
15. Dodatne i veštačke promenljive-objasniti sličnosti i razlike
16. Problem minimuma-objasniti osnovne karakteristike, postupak rešavanja i mogućnosti primene u ekonomskim istraživanjima
17. Objasniti značaj i osnovne karakteristike dualnog problema
18. Na koji način se formuliše dualni problem nekog modela LP
19. Kakva međuzavisnost postoji između promenljivih primarnog i dualnog problema
20. Kakav odnos postoji između vrednosti funkcija cilja primarnog i dualnog problema za bilo koje njihovo moguće rešenje. Dokazati
21. Kakav je odnos između vrednosti funkcija cilja primarnog i dualnog problema za njihova optimalna rešenja. Dokazati
22. Kakav je odnos između optimalnih vrednosti dodatnih promenljivih primarnog i realnih promenljivih dualnog problema i obrnuto. Dokazati i objasniti
23. Ekonomsko tumačenje dualnih promenljivih-dokazati i objasniti
24. Objasniti osnovne karakteristike i značaj primene simpleks tabele
25. Objasniti način formiranja i značenje pojedinih elemenata inicijalne simpleks tabele
26. Objasniti način izračunavanja elemenata simpleks tabele u postupku određivanja optimalnog rešenja zadatka LP
27. Navesti i objasniti kriterijum za promenu strukture vektorske baze (ulazak i izlazak promenljivih iz baze)
28. Šta je problem degeneracije zadatka LP i koje su njegove posledice
29. Na osnovu čega se utvrđuje potojanje višestrukog optimalnog rešenja u zadatku LP (grafički i analitički)
30. Analitički i grafički objasniti slučaj zadatka LP u kome ne postoje moguća rešenja
31. Dati analitičku i grafičku interpretaciju zadatka LP u kome ne postoje konačne vrednosti promenljivih i funkcije cilja
32. Dualni simpleks metod
33. Celobrojno programiranje-opšta formulacija zadatka i metodi za rešavanje
34. Gomorijevo ograničenje i potpuno celobrojno programiranje
35. Grafički metod i dokaz teoreme kod celobrojnog linearnog programiranja
36. Delimično celobrojno programiranje
37. Teorema kod celobrojnog programiranja
38. Postoptimalna analiza
39. Promena vektora c u postoptimalnoj analizi
40. Promena vektora ograničenja u postupku postoptimalne analize

41. Promena matrice A u postupku postoptimalne analize
42. Parametarsko programiranja-formulacija zadatka i geometrijska interpretacija
43. Geometrijska interpretacija i grafičko rešenje zadatka parametarskog programiranja
44. Varijabilnost koeficijenata u funkciji cilja kod parametraskog programiranja
45. Hiperbolično (RLP) programiranje- opšti oblik zadatka
46. Dokazati teoremu o monotonosti funkcije cilja kod hiperboličnog programiranja
47. Dokazati da funkcija cilja RLP dostiže ekstremnu vrednost u ekstremnoj tački skupa mogućih rešenja
48. Grafički metod za rešavanje zadatka kod hiperboličnog programiranja (opšti oblik)
49. Grafički metod-slučaj funkcionala bez slobodnog člana
50. Grafički metod-slučaj funkcionala sa slobodnim članom
51. Martošev metod za rešavanje problema hiperboličnog programiranja
52. Čarns-Kuperov metod za rešavanje problema hiperboličnog programiranja
53. Osnovna teorema hiperboličnog programiranja
54. Za koje potrebe se koristi transportni problem i koji su osnovni elementi modela TP
55. Opšti oblik transpotnog problema
56. Dokazati teoremu o jednakosti ponude i tražnje kod TP
57. Dokazati da matrica koeficijenata sistema ograničenja kod TP ima r=m+n-1
58. Zašto se u modelu transporta bazično rešenje obrazuje od m+n-1 promenljivih
59. Koji metodi se koriste za određivanje početnog bazičnog rešenja kod transportnog problema
60. Koji je razlog pojavljivanja i kako se manifestuje problem degeneracije kod TP? Kako se on prevazilazi
61. Stepping stone metod
62. Metod potencijala
63. Objasniti otvoreni model transporta i postupak njegovog rešavanja
64. Osnovni pojmovi i pretpostavke teorije transportnih mreža
65. Transportni problem na mreži sa neograničenim kapacitetom komunikacija
66. Transportni problem na mreži sa ograničenim kapacitetom komunikacija
67. Teorija igara-osnovne karakteristike i vrste igara
68. Objasniti osnovne karakteristike proste matrične igre. Princip minimaksa, sedlasta tačku i optimalne čiste strategije
69. Matrične igre sa mešovitim strategijama
70. Rešavanje mešovitih matričnih igara
71. Rešavanje igre reda 2x2
72. Rešavanje igara (2,n) i (m,2)
73. Redukcija matrice plaćanja
74. Rešavanje igara korišćenjem LP

Osnovna literatura:

1.Rakočević S., Backović M., ″OPERACIONA ISTRAŽIVANJA″ Ekonomski fakultet, Podgorica, 2003.

1) Ekonomski problemi koji mogu biti predmet modeliranja koriscenjem metoda linearnog programiranja su: proizvodno planiranje, planiranje investicija, planiranje transpotra robe, optimalno rasporedjivanje kadrova.

- **Proizvodno planiranje**. Osnovni cilj primjene modela linearnog programiranja u domenu proizvodnog planiranja jeste optimizacija proizvodnje. U uslovima ograničenog iznosa rasursa (sirovina ,radne snage, masina, finansiskih sredstava i sl.), proizvodno preduzeće može proizvoditi različite količine proizvoda iz sopstvenog asortimana. U namjeri da maksimizira ukupan rezultat svoga poslovanja preduzeće je veoma zainteresovano da iskoristi resurse sa kojima u odredjenom periodu raspolaže na najbolji način. Prevodjenjem osnovnog cilja poslovanja na odgovarajucu funkciju cilja i nacin koriscenja i iznos raspolozivih resursa na odgovarajuci sistem ogranicenja, resavanjem pogodno definisanog modela linearnog programiranja dolazi se do preciznih podataka o optimalnom nivou proizvodnje pojedinih proizvoda.
- **Planiranje invasticija**. U uslovima ograničenog iznosa investicionih sredstava, korišćenjem LP može se odrediti optimalan nivo ulaganja u pojedine hartije od vrijednosti, kao i druge vrste investicija. Optimalno planiranje ulaganja u hartije od vrijednosti, u uslovima razvijenog finansiskog trzišta, predstavlja problem koji se postavlja u okviru poslovanja finansiskih institucija, banaka, investicionih fondova, osiguravajućih kompanija, i sl. Modeliranje i resavanje problema optimizacije portfolija koriscenjem linearnog programiranja moze biti realizovano na razlicite nacine, zavisno od toga koji se od poznatih kriterijuma efikasnosti ulaganja u hartije od vrijednosti koristi. Tako, npr., funkcija cilja pogodno definisanog modela linearnog programiranja za optimizaciju portfolija moze izrazavati zahtjev za maksimizacijom ukupnog prinosa na investirana sredstva, kao izahtjev za minimizacijom rizika.
- **Planiranje transporta robe**. Transport robe od odredjenog broja proizvodjača do potrošača, u uslovima njihove teritorijalne razdvojenosti, izaziva obično velike troškove distribucije i prevoza. Zbog toga minimizacija ovih troškova predstavlja jedan od uslova efikasne organizacije i finansiskog uspjeha velikog broja privrednih subjekata. Ukoliko se kao osnovni zahtjev optimizacije transporta robe postavi minimizacija ukupnih troškova pravoza, tada se ovaj problem može veoma efikasno modelirati i rešavati korišćenjem modela linearnog programiranja. Na taj nacin funkcija cilja pogodno definisanog modela izrazavala bi ukupne troskove prevoza robe, dok bi sistem ogranicenja izrazavao ograniceni iznos ponude homogene vrste robe razlicitih proizvodjaca ,odnosno iznos traznje pojedinih potrosaca. Ovaj specifican problem linearnog programiranja, koji se naziva transportni problem, resava se koriscenjem razlicitih metoda na nacin slican opstem algoritmu resavanja modela linearnog programiranja.
- **Optimalno rasporedjivanje kadrova** je problem sa kojim se često susrijeću proizvodna preduzeca, preduzeća iz oblasti usluga, transportna preduzeća, bolnice i sl. U uslovima razvijene specijalizacije brojnih izvršilaca za obavljanje pojedinih poslova, postavlja se veoma često pitanje kako napraviti takav raspored za obavljanje odredjenog broja poslova za koji će se ostvariti maksimalna efikasnost u radu. Pri tome efikasnost moze biti izrazena kroz zahtjev za minimizacijom ukupnog radnog vremena, minimizacijom troskova, maksimizacijom profita i sl. Ovaj problem koji se resava primjenom specijalnog oblika modela linearnog programiranja, obicno se predstavlja takozvanim modelom asignacije, odnosno modelom rasporedjivanja.

2) Postupak korišćenja modela operacionih istrazivanja u procesu poslovnog odlučivanja. Razliciti modeli kvantitativne analize koriste sa za potrebe poslovnog upravljanja u situacijama kada treba rijesiti neke kompleksne probleme, koji se mogu kvantitativno izraziti i uspjesno predstaviti

pogodno odabranim matematickim i statistickim relacijama. Prema tome, ovakav pristup u procesu donosenja poslovnih odluka koristi se u sledecim uslovima:

- Poslovni problem je kompleksan i postoji veliki broj faktora koji uticu na rezultat realizacije donijete odluke;
- Postoji mogucnost obezbedjenje neophodnih podataka za matematicko i statisticko predstavljanje poslovnog problema;
- Osnovni ciljevi realizacije posmatrane odluke mogu se kvantitativno izraziti;
- Postoji mogucnost definisanja odgovarajuceg matematickog modela koji predstavlja dobru aproksimaciju postavljenog problema.

Osnovni cilj koriscenja modela kvantitativne analize u procesu donosenja poslovnih odluka sadrzan je u zahtjevu da se donosiocu odluka omoguci dobijanje egzaktne informacione osnove za izbor optimalnih resenja poslovnih problema.

Postupak koriscenja kvantitativnih modela za potrebe donosenja optimalnih poslovnih odluka realizuje se u nekoliko faza:

- **Formulisanje problema** koja predstavlja početnu i najznačajniju fazu kvantitativne analize, u okviru koje se mora precizno definisati suština problema koji treba riješiti. Ovo je i ujedno najteza faza ukupne kvantitativne analize, zbog čega se i kaze da dobro formulisan problem mozemo smatrati polovonom procesa primjene modela za donošenje optimalnih poslovnih odluka. Formulacija problema je proces koji se odvija sve do konacnog dobijanja resenja koja se mogu koristiti za poslovno odlucivanje. To znaci da pocetno definisan problem moze biti modifikovan u toku realizacije narednih faza.
- **Definisanje modela** predstavlja fazu u okviru koje stručnjaci moraju definisati takav model koji na najboli moguci način aproksimira prethodno formulisani problem. Definisanje modela zahtijeva veoma kompleksnu analizu koja mora obuhvatiti sve karakteristike problema i izraziti sve medjuzavisnosti koje postoje izmedju sastavnih djelova problema. Odnosi izmedju promjenjljivih u modelu mogu biti izrazeni preko jednacina, nejednacina, funkcija ili na neki drugi nacin, sto zavisi od karaktera samog modela. Osim toga , veoma vazan aspekt u definisanju modela predstavlja vremenska momponente njegove primjene. Naime, neke od karakteristika (ogranicenja, ciljevi, okruzenje i s.) problema mogu se u vremenu znacajno mijenjati, model mora biti definisan tako da omogucuje permanentno inoviranje osnovnih podataka kao i samog oblika modela.
- **Priprema podataka** je faza u okviru koje se moraju obezbijediti svi oni podaci koji su neophodni za rešavanje definisanog modela. Čak ni idealno definisan model ne znači ništa ukoliko nismo u mogućnosti da formiramo informacionu osnovu potrebnu za njegovu primjenu. Zbog toga se faza definisanja modela i faza prikupljanja podataka najčešće paralelno odvijaju – medjusobno su uslovljene. Osim toga stalne izmjene uslova poslovanja namecu potrebu da prikupljanje podataka predstavlja permanentan proces, na osnovu kojeg se obezbedjuje vremenski uspjesno koriscenje definisanog modela.
- **Rešavanje modela** je faza u okviru koje se praktično vrši verifikacija prethodnih faza kvantitativne analize, pri čemu se prije svega ocjenjuje validnost modela i njegova upotrebljivost za konkretne potrebe. Ukoliko rešavanjem konkretnog modela dobijemo moguća rešenja koja zadovoljavaju ograničavajuće uslove i matematički izražen cilj realizacije konkretne odluke, onda takva rešenja možemo smatrati optimalnim i koristiti ih kao povoljnu alternativu poslovne odluke. U suprotnom slucaju, moramo se vratiti na prethodne faze kvantitativne analize i izvrsiti prilagodjavanje modela.
- **Korišćenje rešenja** je završna faza i potpuna verifikacija korisnosti i ispravnosti kvantitativne analize, u poslednjoj fazi se dobijena rešenja koriste za potrebe donošenja optimalnih poslovnih

odluka. U okviru ove faze dobijena rešenja se prihvataju od strane menadžera kao dobra orjentacija za poslovno odlučivanje i vrši se njihova transformacija u poslovnu strategiju.

3) Matematičko programiranje predstavlja oblast matematike čiji je predmet razmatranja teoriski i numerički potupak odredjivanja ekstremne vrijednosti funkcije više promjenjljivih, u kojima postoje ograničenja mogućih vrijednosti promjenjljivih. Matematičko programiranje je veoma pogodno za modeliranje različitih ekonomskih aktivnosti koje se realizuju u uslovima ograničenih resursa.
Opšti oblik matematičkog programiranja mozemo postaviti u obliku zahtjeva za odredjivanjem vrijednosti promjenjljivih ***x1, x2,....xn***, koje zadovoljavaju **m** nejednačina i jednačina oblika

$$gi\ (x1,x2...xn)\ \{\leq , = , \geq\}\ bi \qquad i=1,....m \qquad \text{-sistem ograničenja}$$

i za koje se ostvaruje maksimalna ili minimalna vrijednost funkcije

$$Z= f\ (x1,\ x2,...xn) \qquad \text{-funkcija cilja.}$$

U ovako postavljenom modelu prepostavljamo da su funkcije ***(gi i f)*** poznate, dok vrijednosti ***(bi)*** predstavljaju unaprijed zadata ograničenja. U svakom od ogranicenja pojavljuje se ili jednacina ili jedan od dva oblika nejednacina.
Ukoliko su u sistemu ograničenja svi uslovi predstavljeni u vidu jednačina, takav oblik problema predstavlja klasičan problem optimizacije.
Ukoliko sistem ograničenja i odgovarajuću f-ju cilja predstavimo u razvijenom obliku, model matematičkog programiranja je:

$$\begin{aligned}
&(Max)Z = f\ (x1,\ x2,...xn)\\
&g1\ (x) = g1\ (x1,\ x2,...xn) \leq b1\\
&g2\ (x) = g2\ (x1,\ x2,...xn) \leq b2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&gm\ (x) = gm\ (x1,\ x2,...xn) \leq bm
\end{aligned}$$

gdje smo pretpostavili odredjivanje maksimalne vrijednosti f-je cilja **Z**, u uslovima kada su sva ograničenja predstavljena nejednačinama sa znakom **≤ .**

Sve vrijednosti promjenjljivih ***x = (x1, x2,...xn)*** za koje su zadovoljene sve nejednačine sistema ograničenja obrazuju skup mogućih rešenja modela. Cilj resavanja zadatka matematickog programiranja jeste odredjivanje one kombinacije vrijednosti promjenjljivih iz skupa mogucih resenja za koje f-ja cilja ostvaruje ekstremnu vrijednost. Takvo resenje koje obeljezavamo ***x*=(x1*, x2*, ... xn*),*** predstavlja optimalno resenje zadatka matematickog programiranja.

4) Osnovne pretpostavke modela linearnog programiranja su:
- **Linearnost** koja podrazumijeva postojanje linearnih zavisnosti izmedju promjenjljivih u zadatku linearnog programiranja. Ova prepostavka zadovoljena je tako što su f-ja cilja i odgovarajući uslovi u modelu linearnog programiranja izraženi linearnim funkcijama. Kao posledica linearnosti u modelu linearnog programiranja zadovoljene su takodje dvije osnovne prepostavke, **proporcionalnost i aditivnost.** Proporcionalnost podrazumijeva posojanje proporcionalnog odnosa u modelu linearnog programiranja izmedju inputa i outputa, dok osobona aditivnosti podrazumijeva da se ukupna vrijednost f-je cilja moze dobiti kao zbir vrijednosti pojedinih aktivnosti koje predstavljaju sastavne elemente modela linearnog programiranja.
- **Izvjesnost**, podrazumijeva da su svi parametri modela LP unaprijed jednoznačno odredjeni, što znači da su koeficijenti f-je cilja i sistema ograničenja odredjeni i ne mijenjaju se u toku rešavanja modela. S obzirom na ovu osobinu, model linearnog programiranja smatramo deterministickim modelom.

- **Djeljivost** podrazumijeva da promjenljjive u modelu linearnog programiranja ne moraju biti cijeli brojevi. U opštem obliku modela linearnog programiranja ne postavlja se **tkz**. uslov cjelobrojnosti, što znači da vrijednosti promjenljjivih mogu biti izrazene i u obliku decimalnih brojeva. Ukoliko se, medjutim, iz odredjenih razloga zahtijeva cjelobrojnost promjenljjivih, onda je u pitanju specijalan oblik zadatka- model cjelobrojnog linearnog programiranja.
- **Nenegativnost**, predstavlja jednu od osnovnih pretpostavki modela linearnog programiranja. Ova pretpostavka ima svoj metodološki i suštinski (ekonomski) značaj. Naime, kao opšti algoritam rešavanja modela linearnog programiranja predstavlja simpeks metod, to je za primjenu ovog metoda neophodno zadovoljenje uslova nenegativnosti promjenljjivih, što čini metodološki aspekt uslova nenegativnosti promjenljjivih. S druge strane, kao promjenljjive u modelu linearnog programiranja koji se koristi za odredjene ekonomske analize predstavljaju odredjene ekonomske veličine, jasno je da one ne mogu biti negativne. Zbog toga uslov nenegativnosti pored funkcije cilja i sistema ogranicenja predstavlja jedan od osnovnih elemenata modela linearnog programiranja.

5) Standardni problem maksimuma predstavlja takav oblik modela linearnog programiranja u kome se postavlja zahtjev za odredjivanjem maksimalne vrijednosti unaprijed poznate linearne funkcije (f-je cilja), pod uslovima koji su predstavljeni sistemom nejednacina sa znakom **≤ .** ovakav oblik linearnog programiranja, ekonomski posmatrano, definise se u uslovima postojanja ogranicenih resursa, koje treba na najracionalniji nacin utrositi radi ostvarivanja maksimalnih ekonomskih efekata. Osnovni elementi modela su:

- **Funkcija cilja**, koja izražava osnovni cilj koji se unaprijed definiše i radi koga se formuliše i rešava odgovarajući model linearnog programiranja . U obliku problema maksimuma kao cilj se može postaviti maksimizacija ukupnog profita, maksimizacija deviznih efekata, maksimalni stepen zaposlenosti, i sl.
- **Sistem ograničenja** izražava uslove i način korišćenja ograničenih resursa, čiji iznos je izražen slobodnim članovima sistema ograničenja.
- **Uslov nenegativnosti** predstavlja obavezan elemanat modela linearnog programiranja. Uslov nenegativnosti mora biti zadovoljen jer nijedna djelatnost ne može biti negativna.

Svi elementi modela, izuzev promjenljjivih ***x1, x2, ...,xn*** unaprijed su poznati, sto znaci da koeficijenti u funkciji cilja, koeficijenti u sistemu ogranicenja i slobodni clanovi sistema ogranicenja predstavljaju parametre modela.

6) Dodatne promjenljjive se uvode u model linearnog programiranja u cilju odredjivanja rešenja modela, jer sistem nejednačina moramo transformisati u sistem jednačina tako što ćemo lijevoj strani svake nejednačine dodati nenegativnu vrijednost tkz. **dodatne promjenljjive,** koja je jednaka vrijednosti razlike izmedju desne i lijeve strane nejednacine. Dodatne promjenljjive osim metodoloske uloge u pretvaranju sistema nejednacina u sistem jednacina, imaju veoma vazan sustinski **(ekonomski)** znacaj prilikom resavanja zadatka linearnog programiranja. Naime, obzirom da nejednacine sistema ogranicenja problema maksimuma pokazuju nacin koriscenja ogranicenog iznosa raspolozivih resursa (predstavljenih slobodnim clanovima sistema ogranicenja), to pozitivne vrijednosti dodatnih promjenljjivih pokazuju iznos neiskoriscenih resursa u nekom od resenja. Tako da vrijednosti dodatnih promjenljjivih iz optimalnog rešenja pokazuju koliko resursa ostaje neiskorišćeno u situaciji kada su vrijednosti realnih promjenljjivih optimalne.

7) Sve vrijednosti promjenjljivih za koje su zadovoljene nejednačine (jednačine) sistema ograničenja predstavljaju tkz. moguca resenja, odnosno obrazuju **skup mogucih rešenja**. Osnovne karakteristike skupa mogućih rešenja su:
   - da je to ograničen i zatvoren skup,
   - da može biti i prazan skup u sličaju kada su postavljeni uslovi kontradiktorni, odnosno kada ne postoji nijedna tačka ***x = (x1, x2,...xn)*** za koju su zadovoljeni svi uslovi (ogranicenja) zadatka,
   - Skup mogućih rešenja obrazovan je od tačaka koje zadovoljavaju sve nejednačine (jednacine) sistema ograničenja,
   - Veoma bitna karakteristika skupa mogućih rešenja je i da je on konvekstan skup.

8) Skup mogućih rješenja zadatka linearnog programiranja je konveksan skup
   Dokaz: Da bi dokazali tvrdjenje naše teoreme potrebno je da pokažemo da konveksna kombinacija svaka dva moguća rješenja, takođe predstavlja moguće rješenje. Zbog toga, uzmimo da

$$x' = (x_1', x_2', x_3', \dots x_n') \quad \text{i} \quad x'' = (x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$$

   predstavljaju moguća rješenja problema, na osnovu čega je

$$Ax' = b \qquad \textbf{i} \qquad Ax'' = b$$

   Posmatrajmo sada tačku ***x*** koja predstavlja konveksnu kombinaciju tačaka ***x'*** i ***x”*** odnosno

$$x = \lambda x' + (1-\lambda)x'', \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

   Ukoliko sada tačku ***x*** uvrstimo u sistem jednačina problema, imamo

$$Ax = A[\lambda x' + (1-\lambda)x''] = \lambda Ax' + (1-\lambda)Ax''$$
$$= \lambda Ax' + Ax'' - \lambda Ax'' = \lambda b + b - \lambda b = b$$

   Na osnovu čega vidimo da tačka ***x*** predstavlja moguće rješenje zadatka linearnog programiranja, tj. da sve konveksne kombinacije mogućih rješenja takođe predstavljaju moguća rješenja. Skup mogućih rješenja je **konveksan skup**, što je trebalo dokazati.

9) Uvodjenjem dodatnih promjenjljivih, sistem od **m** jednacina sa **n(n=p+m)** nepoznatih, pri cemu je **m < n** . Iz linearne algebre je poznato da ukoliko matrica **A** ima rang **m** (maksimalan broj linearno nezavisnih vektor kolona) mozemo uzeti da su bilo koje **n - m** promjenjljive jednake nuli, a zatim odredjivati vrijednosti ostalih promjenjljivih. Bilo koje tako odredjeno rešenje problema maksimuma, predstavlja **bazično rešenje**. Ukoliko takvo rešenje zadovoljava i uslov nenegativnosti ono predstavlja **bazično moguće rešenje**, dok bazično moguće rešenje ***x*= (x1*, x2*,...xk*)*** , predstavlja optimalno rešenje zadatka standardnog problema maksimuma ukoliko imamo da je ***Z(x*) ≥ Z(x’)*** , za bilo koje moguće rešenje ***x’*** . Drugim riječima, rešenje zadatka kod standardnog problema max je optimalno ukoliko je moguće i ukoliko daje maksimalnu vrijednost f-je cilja.

10) Optimalno rješenje zadatka linearnog programiranja nalazi se u ekstremnoj tački konveksnog skupa mogućih rješenja.
   Dokaz:
   Kako je skup mogućih rješenja konveksan, ograničen skup postoji konačan broj (pretpostavimo k) ekstremnih tačaka koje ćemo oznaciti sa ***x1,x2,...xk*** . Neka je ***x**** tačka za koju funkcija cilja ostvaruje maksimum, odnosno za koju imamo da je ***z(x*) ≥ z(x)*** za svako moguće rješenje ***x***.
   Ako je **x*** ekstremna tačka konveksnog skupa mogućih rješenja, teorema je dokazana.

Pretpostavimo suprotno, tj da ***x**** nije ekstremna tačka skupa mogućih rješenja. Tada tačku ***x**** možemo izraziti kao konveksnu kombinaciju skupa ekstremnih tačaka, tj.

$$x^* = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k$$

gdje je $\lambda i \geq 0$ (i=1, ...k) i $\Sigma\lambda i=1$
Kako je funkcija ***z*** linearna, možemo pisati

$$z(x^*) = z(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k) =$$
$$= \lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2) + ... + \lambda_k z(x_k)$$

Ukoliko sada u poslednjoj jednačini, od ***k*** mogućih rješenja predstavljenih ekstremnim tačkama mogućeg skupa izaberemo tačku za koju funkcija ***z*** ostvaruje maksimalnu vrijednost, na primer ***xk*** , tada možemo pisati

$$\lambda_1 z(x_k) + \lambda_2 z(x_k) + ... + \lambda_k z(x_k) \geq$$
$$\lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2) + ... + \lambda_k z(x_k) = z(x^*)$$

Obzirom da su koeficijenti $\lambda_1 \geq 0$ i $\sum \lambda_1 = 1$, dobijamo:

$$\lambda_1 z(x_k) + \lambda_2 z(x_k) + ... + \lambda_k z(x_k) =$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k) z(x_k) = z(x_k)$$

odnosno

$$z(x_k) \geq z(x^*),$$

što je i trebalo dokazati.

11) Grafički metod je najjednostavniji način odredjivanja rešenja u zadatku linearnog programiranja. On se može primijeniti samo u slučaju kada u zadatku postoje dvije realne promjenjljive. Grafičkim metodom, odredjevanje optimalnog rešenja zatka linearnog programiranja sastoji se od sledećih aktivnosti:
- Formulisanje problema u obliku zadatka linearnog programiranja,
- Grafičko predstavljanje pravih koje reprezentuju nejednačine sistema ograničenja,
- Identifikacije skupa mogućih rešenja za koja su zadovoljenje sve nejednačine sistema ograničenja i uslov nenegativnosti,
- Nanošenje prave koja reprezentuje f-ju cilja,
- Translacija prave f-je cilja s lijeva u desno (nanosenje paralelnih pravih) sve dok ne ucrtamo jednu takvu pravu koja sa skupom mogucih resenja ima samo jednu zajednicku tacku,
- Utvrdjivanja optimalnih vrijednosti promjenjljivih ***x1 i x2*** u vidu koordinata extremne tačke skupa mogućih rešenja najudaljenije od koordinatnog početka
- Odredjivanje vrijednosti f-je cilja za optimalne vrijednosti promjenjljivih.

Vazno je napomenuti da je postupak primjene grafickog metoda odredjivanja optimalnog resenja istovjetan i u slicaju resavanja problema minimuma, kao i mjesovitog problema maksimuma. U slucaju rjesavanja problema minimuma, inverzan zahtjev definisan odgovarajucom funkcijom cilja, determinise egzistenciju optimalnog resenja u tacki skupa mogucih resenja koja je najbliza koordinatnom pocetku.

12) Osnovne karakteristike simpleks metoda su:
- Predstavlja algoritam u kome se u nizu iteracija dolazi do optimalnog rešenja, pri tome se u svakoj od iteracija utvrdjuju vrijednosti promjenjljivih koje odgovaraju ekstremnim tačkama skupa mogućih rešenja i ispituje njihova optimalnost,

- Obezbjedjuje najkraći put do optimalnog rešenja, sto znaci da se u potupku resavanja zadatka linearnog programiranja ne utvrdjuju resenja koja odgovaraji svim ekstremnim tackama konveksnog skupa mogucih resenja (kao sto je to slucaj kod metoda "pretrazivanja" koji se koristi u kombinaciji sa grafickim metodom).

Za razliku od grafičkog metoda , koji se može koristiti samo za rešavanje problema u kojima postoje dvije realne promjenjljive, simpleks metod predstavlja algoritam koji se koristi za rešavanje svih oblika zadatka linearnog programiranja.

Simpleks kriterijumi za promjenu vektorske baze su **I i II Dantzigov simpleks kriterijum.**

Kriterijum za uključivanje jednog od nebazičnih vektora u bazu kod problema maksimuma je:

Ct - Zt = max (Cj-Zj) > 0..............**I Dantzigov simpleks kriterijum**

Ukoliko su za neko od rešenja ove razlike za sve nebazične vektore negativne, tj**. (C j- Zj) < 0,** takvo rešenje predstavlja optimalno rešenje problema maksimuma.

Izraz:

p = Xki / Xkl = min Xi / Xu, za Xil > 0

prestavlja kriterijum za izlazak vektora iz baze, odnosno **II Dantzigov simpleks kriterijum.**

Nakon smjene vektora u bazi, na osnovu primjene simpleks kriterijuma, izračunava se novo poboljšano rešenje.

13) Kriterijum za ulazak vektora A_j u bazu odredićemo na osnovu:

$$z = \sum_{i=p+1}^{p+m} c_i x_i \qquad \text{i} \qquad z_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} c_i$$

Naime, ako drugi izraz pomnožimo koeficijentom $\rho > 0$, i oduzmemo ga od prvog izraza, dobićemo:

$$z - \rho z_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} c_i x_i - \rho \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} c_i$$

Ukoliko lijevoj i desnoj strani ove relacije dodamo vrijednost ρc_j, dobijamo

$$z - \rho(z_j - c_j) = \sum_{i=p+1}^{p+m} (x_i - \rho x_{ij}) c_i + \rho c_j$$

Ukoliko izraz na desnoj strani obilježimo sa z', odnosno ako je

$$z' = \sum_{i=p+1}^{p+m} (x_i - \rho x_{ij}) c_i + \rho c_j$$

Tada, nakon zamjene u relaciji dobijamo:

$$z' = z - \rho(z_j - c_j)$$

tj.

$$z' = z + \rho(c_j - z_j) = z + \rho \Delta z$$

Gdje $\Delta z'$ predstavlja povećanje vrijednosti funkcije cilja do koje je došlo uključivanjem u bazu vektora A_j, odnosno povećanje vrijednosti funkcije cilja do koje dolazi uključivanjem jedne jedinice promjenljive x_j u bazično rješenje. Ukoliko je, prema tome, vrijednost $\Delta z' = (c_j - z_j)$ veća, povećanje vrijednosti funkcije cilja će biti veće, uz pretpostavku da je $\Delta z' > 0$. Na osnovu toga, kriterijum za uključivanje jednog od prethodno nebazičnih vektora u bazu sastoji se u tome da treba odabrati onaj vektor (l-ti) kod koga je zadovoljen uslov:

$$c_l - z_l = \max_j (c_j - z_j) > 0$$

Ovaj izraz predstavlja kriterijum optimalnosti, odnosno **I simpleks kriterijum** za izmjenum vektorske baze. Ukoliko su za neko od rješenja ove razlike za sve nebazične vektore negativne, tj. $(c_j - z_j) < 0$, takvo rješenje predstavlja optimalno rješenje problema maksimuma.

14) Ukoliko u sistemu ograničenja kod problema maksimuma, osim nejednačina sa znakom ≤ imamo uslove koji su predstavljeni jednačinama, ili nejadnačinama sa znakom ≥ takav oblik problema nazivamo mješoviti problem maksimuma.
Da bo objasnili suštinsku i metodološku razliku mješovitog problema u odnosu na standardni problem maksimuma, posmatrajmo sledeći oblik problema;

(max)Z = c1x1+c2x2+...+cpxp

a11x1+a12x2+....+a1pxp ≤ b1
a21x1+a22x2+....+a2pxp ≤ b2
...
ak1x1+ak2x2+....+akpxp = bk
...
am1x1+am2x2+....+ampxp ≥ bm
x1, x2,...,xp ≥ 0

Za razliku od standardnog problema max u kome su sve nejednačine sa znakom ≤ , u ovom problemu vidimo da je ***k-ti*** uslov dat u vidu jednačine, dok je ***m-ti*** uslov dat u vidu nejednačine sa znakom ≥ . Iako i u ovom sličaju maksimuma vaze karakteristike mogućih ,baričnih i optimalnih rešenja, različito izraženi uslovi u sistemu ograničenja izazivaju promjenu postupka odredjivanja optimalnog rešenja u odnosu na postupak kod standardnog problema maksimuma. Kod standardnog problema maksimuma, za potrebe odredjivanja optimalnog resenja, sistem nejednacina transformisemo u sistem jednacina uvodjenjem dodatnih promjenjljivih. Pocetno bazicno resenje odredjujemo na osnovu pretpostavke da su realne promjenjljive jednake nuli. Prilikom transformisanja ograničavajućih uslova kod mješovitog problema, osim dodatnih u sistemu se uvode i vještačke promjenjljive, kod nejednačina sa znakom ≥, dok se samo vjestacke promjenjljive uvode u jednacine. Pored toga , za razliku od standardnog problema kod koga se funkciji cilja dodaju samo dodatne, karakteristika mješovitog problema je da se f-ji cilja dodaju i vještačke promjenjljive i to sa koefincijentom ***–M*** za problem maksimuma i ***+M*** za problem minimuma. (M, veliki konacan broj).

15) Dodatne promjenjljive se dodaju lijevim stranama nejednačina sa znakom ≤ , odnosno oduzimaju od lijevih strana nejednačina sa znakom ≥ , čime ove promjenjljive ispunjavaju svoju metodolišku i suštinsku ulogu u modelu linearnog programiranja. Vještačke promjenjljive uvodimo samo u jednačine i nejednačine sa znakom ≥ , i to isključivo iz metodoloških razloga. Vještačke promjenjljive za razliku od dodatnih nemaju nikakvo suštinsko značenje, već predstavljaju isključivo metodološki postupak neophodan za odredjivanje početnog baričnog rešenja. Osim toga, u postupku rešavanja zadatka vještačke promjenjljive, moraju biti eliminisane iz baze, što znači da se one ne mogu naći u optimalnom rešenju zadatka linearnog programiranja. Eliminisanje

vještačkih promjenjljivih se obezbjedjuje njihovim uvodjenjem u f-ju cilja sa koeficijentom ***–M*** (za problem maksimuma) i ***+M*** (za problem minimuma). Ukoliko se ipak neka vještačka promjenjljiva pojavi u optimalnom rešenju sa pozitivnom vrijednošću, onda je to znak da je sistem ogranicenja nekonzistentan, odnosno da postavljeni problem nema rešenja!!

16) Problem minimuma predstavlja takav oblik modela linearnog programiranja u kome se postavlja zahtjev za odredjivanje minimalne vrijednosti unaprijed poznate f-je cilja, uz poštovanje zadatih ograničenja predstavljenih u obliku sistema jednačina i nejednačina. U okviru preduzeca , problem minimuma se najcesce koristi za odredjivanje optimalnog programa proizvodnje pojedinih proizvoda za koji ce se ostvariti minimalni ukupni troskovi (materijala, sirovina, angazovane radne snage, i sl.). Ovaj metod karakteriše sistem ograničenja predstavljen isključivo nejednačinama sa znakom ≥ , dok mješoviti problem podrazumijeva i jednačine i nejednačine sa znakom ≤ . Prilikom transformisanja sistema ograničenja u sistem jednačina u nejednačine sa znakom ≤ uvodima samo daodatne promjenjljive, u jednačine uvodimo samo vještačke, dok u nejednačine sa znakom ≥ uvodimo i dodatne i vještačke promjenjljive. Bez obzira o kakvom problemu minimuma se radi (standardnom ili mješovitom) optimalno rešenje se nalazi u jednoj od ekstremnih tačaka (najblizoj pocetku prostora), konveksnog, odozdo ograničenog skupa mogućih rešenja.
Problem minimuma možemo predstaviti u sledećem obliku:

(min)Z = c1x1+c2x2+...+cpxp

a11x1+a12x2+....+a1pxp ≥ b1
a21x1+a22x2+....+a2pxp ≥ b2
...
am1x1+am2x2+....+ampxp ≥ bm
x1, x2,...,xp ≥ 0
u kome se postavlja zahtjev za odredjivanjem nenegativnih vrijednosti promjenjljivih za koje f-ja cilja ***Z*** ostvaruje minimalnu vrijednost. Transformisanjem sistema ograničenja iz nejednačina u jednačine , uvodjenjem dodatnih promjenjljivih, dobijamo

(max)Z = c1x1+c2x2+...+cpxp +0Xp+1 +0Xp+2 + 0Xp+m

a11x1+a12x2+....+a1pxp – Xp+1 =b1
a21x1+a22x2+....+a2pxp -Xp+2 =b2
..
am1x1+am2x2+....+ampxp -Xp+m =bm

x1, x2,...,Xp+m ≥ 0
i pored toga sto smo sistem nejednacina transformisali u sistem jednacina, nismo u mogucnosti da odredimo pocetno bazicno resenje problema minimuma. Naime, ukoliko bi posli od pretpostavke da su realne promjenjljive jednake nuli, s obzirom da su vrijednosti ***bi*** > ***0*** , vrijednosti bazicnih promjenjljivih bi bile negativne, zbog cega ne bi mogli odrediti optimalno resenje koriscenjem simpleks postupka. Zbog toga se uvode vjestacke promjenjljive, ciji vektori obrazuju jedinicnu matricu koju mozemo uzeti za pocetnu vektorsku bazu.
Nakon uvodjenja vještačkih promjenjljivih problem možemo predstaviti u obliku:

(min)Z = c1x1+c2x2+...+cpxp +0Xp+1 +0Xp+2 + 0Xp+m + M (Xp+1.M, Xp+2.M,...Xp+m.M)

a11x1+a12x2+....+a1pxp - Xp+1 +Xp+1.M =b1
a21x1+a22x2+....+a2pxp - Xp+2 +Xp+2.M =b2
...
am1x1+am2x2+....+ampxp - Xp+m +Xp+m.M =bm

x1, x2,...,Xp+m ≥ 0

17) Svakom problemu linearnog programiranja odgovara dualni problem, koji takodje predstavlja problem linearnog programiranja. Izmedju osnovnog (primarnog) i izvedenog (dualnog) problema linearnog programiranja postoji inverzan odnos u pogledu osnovnog zahtjeva, odnosno u pogledu zahtjeva za odredjivanjem ekstremne vrijednosti funkcije cilja. Ukoliko se u početnom problemu koji se naziva primarni problem , postavi zahtjev za maksimizacijom f-je cilja, u dualnom problemu će f-ja cilja biti f-ja minimuma, i obrnuto. Osim toga , nejednačine ograničenja dualnog problema izvode se na osnovu nejednačina ograničenja primarnog problema. Rešavanjem konkretnih ekonomskih problema na osnovu ovakvog odnosa izmedju primarnog i dualnog problema, primarne i dualne promjenjljive omogucavaju dobijanje znacajnih informacija o karakteru optimalnog resenja. Zbog toga korišćenje dualng problema u postupku resavanja nekog problema linearnog programiranja ima veoma značajne analitičke i metodološke karakteristike.
Izmedju primarnog i dualnog problema postoji takav odnos da u dualnom problemu ima tačno onoliko promjenjljivih koliko u primarnom problemu ima strukturnih ograničenja. Isto tako u dualnom problemu postoji po jedna nejednačina ograničenja za svaku realnu promjenjljivu primarnog problema.
Osim značajnih analitičkih karakteristika pomenut ćemo i metodološke povoljnosti korišćenja dualnog problema. Naime, s obzirom da odredjivanje optimalnog rešenja bilo koga zadatka linearnog programiranja istovremeno znači odredjivanje optimalnog rešenja i njemu odgovarajućeg dualnog problema, moguće je njihovo alternativno korišćenje za postupak rešavanja zadataka.

18) Dualni problem zadatka linearnog programiranja formuliše se na sledeći način:
- Ukoliko primarni problem predstavlja problem maksimuma, f-ja cilja dualnog problema će biti f-ja minimuma, i obrnuto,
- Mijenja se smjer znakova nejednakosti u sistemu nejednačina, i to tako da ukoliko su nejednačine primarnog problema sa znakom ≤ , nejednačine dualnog problema postaju nejednačine sa znakom ≥ i obrnuto.
- Vrši se transponovanje matrice koeficijenata sistema ograničenja primarnog problema, na osnovu čega ukoliko u primarni problem imamo ***(m)*** nejednačina se ***(p)*** promjenjljivih, u dualnom problemu će biti ***(p)*** nejednačina sa ***(m)*** promjenjljivih,
- Koeficijenti uz promjenjljive u f-ji cilja dualnog problema jednaki su slobodnim članovima sistema ograničenja primarnog problema,
- Slobodni članovi sistema nejednačina dualnog problema jednaki su koeficijentima koji se uz promjenjljive nalaze u f-ji cilja primarnog problema,
- Sve promjenjljive dualnog problema moraju biti nenegativne, zbog čega je ovaj uslov obavezno prisutan i u dualnom problemu.

Polazeci od navedenih pravila za formulisanje dualnog priblema nekog zadatka linearnog programiranja mozemo posmatrati osnovni oblik standardnog problema maksimuma:

Primarni problem
(max)Z = c1x1+c2x2+...+cpxp

a11x1+a12x2+....+a1pxp ≤ b1
a21x1+a22x2+....+a2pxp ≤ b2
..
am1x1+am2x2+....+ampxp ≤ bm
x1, x2,...,xp ≥ 0

dualni problem
(min)V = b1y1+b2y2+...+bmym

a11y1+a12y2+....+am1ym ≥ c1
a21y1+a22y2+....+am2ym ≥ c2
..
a1py1+a2py2+....+ampym ≥ cp
y1, y2,...,yp ≥ 0
ukoliko problem maksimuma predstavimo u obliku:
(max)Z=Σ CjXj ....Xi ≥ 0
Tada njemu odgovarajuci dualni problem mozemo predstaviti u obliku:
(min)V=Σ biYi ....Yi ≥ 0

19) Zadaci primarnog i njemu odgovarajućeg dualnog problema predstavljaju dva medjusobno povezana zadatka, tako da se svaki od njih moze smatrati primarnim odnosno dualnim problemom. Očigledno je da izmedju promjenjljivih primarnog i dualnog problema postoji povezanost i medjusobna uslovljenost rešenja. Ta veza moze se izraziti na sledeći način: **Svakoj dodatnoj promjenjljivoj primarnog problema odgovara (medjusobno su povezane) jedna realna promjenjljiva dualnog problema** u obliku:
Xp+1--------Y1
Xp+2--------Y2
. .
. .
Xp+m-------Ym
Dok svakoj glavnoj promjenjljivoj primarnog problema odgovara jedna dodatna promjenjljiva dualnog problema, tj.
X1-----------Ym+1
X2-----------Ym+2
. .
. .
Xp-----------Ym+p
Ovako izražena veza izmedju promjenjljivih primarnog i dualnog problema predstavlja veoma značajnu karakteristiku dualnog problema. Na osnovu iskazane relacije mozemo konstatovati da resavanjem jednog od problema (primarni, dualni) i odredjivanjem optimalnog resenja jednog od njih dibijamo istovremeno i optimalno resenje njemu odgovarajuceg dualnog problema.

Optimalno resenje dualnog problema , na osnovu vec izracunatogoptimalnog resenja primarnog problema, mozemo odrediti na dva nacina:

- Optimalne vrijednosti realnih promjenljivih dualnog problema ***yi (i=1,...m)*** odredjujemo kao negativnu vrijednost razlike I simpleks kriterijuma za dodatne promjenljive iz poslednjeg (optimalnog) resenja primarnog problema, tj.

$$Y_i = -(C_{p+i} - Z_{p+i}) \qquad i=1,...m$$

- Na osnovu optimalnog resenja primarnog problema, optimalne vrijednosti realnih promjenljivih dualnog problema ***yi =(i=1,...m)*** odredjujemo iz relacije:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C_b}\alpha^{-1}_{opt}$$

gdje je ***y=(y1,...ym)***, ***Cb*** vektor vrsta koeficijenata koji se u funkciji cilja primarnog problema nlaze uz promjenljive iz optimalne baze **α *opt***

20) Za bilo koje moguće rješenje $x=(x_1,...,x_p)$ primarnog problema i bilo koje moguće rješenje dualnog problema $y=(y_1,...,y_m)$ vrijednost funkcije cilja primarnog problema manja je ili jednaka vrijednosti funkcije cilja dualnog problema, tj.

$$z(x) \le v(y) \quad \text{ili} \quad \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

<u>Dokaz:</u>
Pomnožimo desnu i lijevu stranu ***i-te*** nejednačine sistema ograničenja primarnog problema sa y_i i sumirajmo po indeksu ***i=1,...m*** , na osnovu čega dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1 + ... + a_{ip}x_p)y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Izraz na lijevoj strani prethodne nejednačine možemo predstaviti u obliku dvostruke sume po ***i=1,...,m*** , i po ***j=1,...,p*** , na osnovu čega prethodnu nejednačinu možemo predstaviti u obliku

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_i x_j \le \sum_{i=1}^{p} b_i y_i$$

Analogno prethodnom postupku, ukoliko j-tu nejednačinu sistema ograničenja dualnog problema pomnožimo sa x_j , zatim sumiramo po ***j=1,...,p***, dobijamo:

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i x_j \ge \sum_{j=1}^{p} c_j x_j$$

Kada su lijeve strane prethodnih nejednačina jednake, konstatujemo da je:

$$\sum_{j=1}^{p} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

što je trebalo i dokazati.

21) Ukoliko su $x^* = (x_1^*,...,x_p^*)$ i $y^* = (y_1^*,...,y_m^*)$, moguća rješenja primarnog i dualnog problema, za koje su vrijednosti funkcija cilja primarnog i dualnog problema jednake, tj.

$$Z(x^*) = V(y^*)$$

tada ***x**** i ***y**** predstavljaju optimalna rješenja primarnog i dualnog problema, respektivno.

<u>Dokaz:</u> Neka je ***x'*** neko moguće rješenje primarnog problema. Tada na osnovu prethodne teoreme znamo da je $z(x') \le v(y^*)$. Međutim, kako je na osnovu uslova teoreme ***Z(x*) = V(y*)*** to je

$z(x') \le z(x^*)$. Kako je ***x'*** bilo koje moguće rješenje primarnog problema, to je ***Z(x*) = (max) Z (x)***,
odnosno ***x**** predstavlja optimalno rješenje primarnog problema. Analogno se dokazuje da ***y**** predstavlja optimalno rješenje dualnog problema.

22) Optimalna vrijednost dualne promjenjljive istovremeno pokazuje i optimalno resenje njemu odgovarajećeg primarnog problema. Svakoj dodatnoj promjenjljivoj primarnog problema odgovara jedna realna promjenjljiva dualnog problema (i suprotno).
Izvodjenje:
Primarni problem max

$$\max Z=\sum_{j=1}^{p} c_j x_j$$

$$\sum^{p} a_{ij} x_j + x_{p+i} = b \qquad (i=1......m)$$
$$X_j > 0 \quad x_{p+i} > 0 \qquad (j=1.....p;\ i=1....m)$$

Dualni problem min

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m} b_j y_i$$

$$\sum^{p} a_{ij} y_i + y_{m+j} = c_j \qquad (i=1......p)$$
$$y_j > 0 \quad y_{m+j} > 0 \qquad (j=1.....m;\ i=1....p)$$

23) Dualne promjenjljive osim značajnih metodoloških osobina , pružaju mogućnost za dobijanje veoma značajnih informacija o karakteru problema linearnog programiranja, kao i ispitivanje uticaja promjenje nivoa korišćenja raspoloživih resursa na vrijednost f-je cilja.
Problem standardnog maksimuma je:
$(max)Z= cx$
$Ax \le b$
$x \ge 0$
odgovarajući dualni problem je:
$(min)V= b' y$
$A'y \ge c'$
$y \ge 0$
Neka ***x**** predstavlja optimalno rešenje primarnog problema, za koje je ***Z(x*) = max Z(x)*** , i neka je odgovarajuće optimalno rešenje dualnog problema ***y**** za koje je ***Z(y*) = min Z(y).***
Pretpostavimo, sada, da se elementi vektora ***b*** (resursi) primarnog problema povećaju za iznos ***Δb***, koji ne izaziva promjenu strukture optimalne baze. Promjena vrijednosti elemenata vektora ***b*** dovesće do povećanja vrijednosti funkcije cilja primarnog problema za iznos od:

$$\Delta Z(x^*) = y^*\Delta b$$

odnosno , povećanje iznosa ***i-tog*** resursa dovest će do promjene vrijednosti f-je cilja primarnog problema za iznos od

$$\Delta Z(x^*) = yi^*\Delta bi$$

Dokaz tvrdjenja proizilazi iz karaktera baz̆ičnih rešenja i teorema dualnosti. Naime, ***x* i x***** predstavljaju optimalne vrijednosti promjenjljivih primarnog problema u sličajevima vektora ***b*** i ***Δb***, respektivno. Na osnovu teoreme dualnosti mozemo pisati

$$cx^*=y^*(b+\Delta b)$$

$$cx^*=y^*b$$

nakon oduzimanja druge jednačine od prve, dobijamo

$$cx^{**} - xy^*=y^*(b+\Delta b)-y^*b$$

odakle dobijamo da je

$\Delta Z(x^*) = y^*\Delta b$

gdje $\Delta Z(x^*)=cx^{**} - cx^*$ predstavlja povećanje vrijednosti f-je cilja izazvano povećanjem vrijednosti vektora ***b***.

24) Simpleks metod predstavlja opšti algoritam koji se koristi za rešavanje svih vrsta zadataka linearnog proframiranja, bez obzira na broj promjenjljivih. Simpleks tabela predstavlja tabelaran način prikazivanja problema linearnog programiranja, koji je prilagodjen za potrebe rešavanja ovih problema korišćenjem simpleks metoda. Tabelarni postupak omogućava da se u nizu iteracija dodje do optimalnog rešenja linearnog programiranja.
Početno bazično rešenje predstavlja se inicijalnom (prvom) simpleks tabelom, koja predstavlja polaznu osnovu za odredjivanje optimalnog rešenja. Na osnovu prve simpleks tabele primjenom simpleks kriterijuma za promjenu vektorske baze, preko niza simpeks tabela dolazi se do optimalnog reženja.

25) Inicijalna simplejs tabela je prva simpleks tabela koja predstavlja osnovu ze odredjivanje optimalnog rešenja. U cilju odredjivanja optimalnog rešenja, u prvom koraku se transformiše sistem ograničenja iz nejednačina u jednačine. Inicijalna simpleks tabela obrazuje se na sledeći način:
- U prvu kolonu tabele unosimo koeficijente koji se u f-ji cilja nalaze uz bazične promjenjljive
- U drugu kolonu tabele unosimo bazične promjenjljive
- Kolona Xb obuhvata vrijednosti bazičnih promjenjljivih u svakom od rešenja, odnosno u svakoj od odgovarajućih simpleks tabela.
- U kolone ***x1, x2,...xp*** prve simpleks tabele unosimo koeficijente koji se uz ove promjenjljive nalaze u sistemu ograničenja zadatka.

Radi preglednosti i cjelokupnosti tabelarnog prikazivanja problema linearnog programiranja, u zaglavlje tabele, tj. u prvu vrstu, unosimo vrijednosti koeficijenata koji se u f-ji cilja nalaze uz promjenjljive iz odgovarajuće kolone simpleks tabele.
Elementi vrste koju obelježavamo sa ***Zj*** odredjujemo za svaku kolonu naše tabele. Vrijednost koja se u okviru ove vrste nalazi u koloni ***Xb*** predstavlja vrijednost f-je cilja za odgovarajuće rešenje i odredjuje se kao zbir proizvoda koeficijenata iz prve kolone i odgovarajućih vrijednosti bazičnih promjenjljivih. Preostale vrijednosti u vrsti ***Zj*** odredjujemo slično, kao zbir proizvoda koeficijenata iz prve kolone i odgovarajućih koeficijenata iz pojedinih kolona.
Poslednja vrsta simpleks tabele predstavlja kriterijum optimalnosti, odnosno prvi simpleks kriterijum za promjenu baze u cilju optimizacije programa.

26) Postupak izračunavanja optimalnog rešenja zadatka LP realizuje se u nekoliko uzastopnih iteracija, pri čemu u svakoj narednoj iteraciji (ako je problem maksimuma), vrijednost f-je cilja mora biti veća od odgovarajuće vrijednosti iz prethodne simpleks tabele. Postupak izračunavanja narednog rešenja, odnosno elemenata naredne simpleks tabele, podrazumijeva realizaciju narednih operacija:

- Odredjivanje koju od prethodno nebazičnih promjenjljivih treba uključiti u bazu u cilju poboljšanja rešenja,
- Utvrdjivanje koja od prethodno bazičnih promjenjljivih treba da napusti bazu, i time ustupi mjesto novouvedenoj promjenjljivoj.
- Utvrdjivanje vrijednosti promjenjljivih u novom rešenju,
- Utvrdjivanje vrijednosti koeficijenata nove simpleks tabele,
- Utvrdjivanje vrijednosti f-je cilja koja odgovara rešenju koje je predstavljeno novom simpleks tabelom, kao i izračunavanje vrijednosti funkcija ***Zj*** za sve promjenjljive.

Vazno je napomenuti da navedeni redosled aktivnosti predstavlja opste pravilo za dobijanje narednog – poboljsanog resenja, odnosno naredne simpleks tabele. Takodje, vazno je konstatovati da prelazak od pocetnog bazicnog na prvo poboljsano resenje zahtijeva odredjivanje promjenjljive – prethodno nebazicne – koju treba ukljuciti u bazu u cilju odredjivanja poboljsanog resenja. Ovakav zakljucak donosimo utvrdjivanjem razlika ***Cj – Zj*** za sve promjenjljive koje se nalaze u poslednjoj vrsti simpleks tabele. Ukoliko je ova razlika pozitivna (negativna) , kod standardnog problema maksimuma ona pokazuje za koliko jedinica ce se povecati (smanjiti) vrijednost funkcije cilja ukoliko odgovarajuca promjenjljiva udje u bazu novog resenja. Kako se postupak odredjivanja optimalnog resenja problema maksimuma realizuje preko niza iteracija, kriterijum za ulazak promjenjljive u bazu mozemo definisati na sledeci nacin:
U naredno bazicno moguce rsenje, u postupku odredjivanja optimalnog resenja problema maksimuma, treba ukljuciti onu prethodno nebazicnu promjenjljivu za koju je u prethodnoj iteraciji razlika ***(Cj - Zj)*** najveca pozitivna. Resenje je optimalno kada u poslednjem redu simpleks tabele ***(Cj - Zj)*** za postoji nijedna pozitivna vrijednost.

27) Karakteristika simpleks metoda i simpleks kriterijuma za izmjenu vektorske baze zahtijeva odredjivanje promjenjljive koju treba uključiti u bazu u cilju obezbjedjivanja poboljšanog rešenja. Ovakav zaključak donosimo utvrdjivanjem vrijednostio razlika ***Cj-Zj*** za sve promjenjljive , koje se nalaze u poslednjoj vrsti simpleks tabele. Ukoliko je ova razlika pozitivna kod standardnog problema maksimuma ona pokazuje za koliko jedinica će se povećati vrijednost f-je cilja u koliko odgovarajuća promjenjljiva udje u bazu novog rešenja. U naredno bazično moguće rešenje , u postupku odredjivanja optimalnog rešenja standardnog problema maksimuma, treba uključiti onu promjenjljivu za koju je najveća pozitivna razlika ***Cj-Zj.***
Nakon odredjivanja nebazične promjenjljive koja treba biti uključena u bazu, neophodno je utvrditi koju od prethodno bazičnih promjenjljivih treba eliminisati iz baze. U cilju odredjivanja kriterijuma za isključivanje neke promjenjljive iz baze, sistem jednačina možemo predstaviti u obliku:

Xp+1=b1-(a11X1+a12X2+...+a1pXp)
Xp+2=b2-(a21X1+a22X2+...+a2pXp)
..
Xp+m=bm-(am1X1+am2X2+...+ampXp)

Početno bazično rešenje smo odredili na osnovu pretpostavke da su sve glavne promjenjljive jednake ***0***, tako da su dodatne promjenjljive jednake slobodnim članovima sistema ograničenja, odnosno izrazi u zagradama na desnoj srani jednaki su nuli. Ukoliko pretpostavimo da ***xk*** treba da udje u bazu, onda sistem jednacina mozemo zapisati:

Xp+1=b1 - a1kXk
Xp+2=b2 - a2kXk
....
Xp+m=bm – amkXk
Odnosno za sve vrijednosti:
Xp+r =br – arkXk   ***..... (r=1,....m)***
Zavisno od vrijednosti koeficijenta ***ark(r=1,...m)*** doci ce do promjene vrijednosti promjenjljivih ***Xp+r*** . medjutom , kako mora biti zadovoljen sistem nenegativnosti, mozemo zapisati:

$$br - arkXk \geq 0 \qquad ....r\ (1,...,m)$$

odnosno

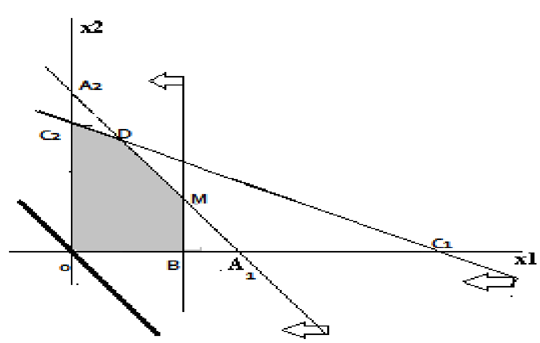
$$Xk \leq br / ark \ ; \quad ark > 0 \quad ....r=(1,...,m)$$

Iz baze treba eliminisati onu, prethodno bazicnu, promenjljivu za koju odredimo minimalni vrijednost:

$$P = \min br/ark = bl/alk, \qquad ark > 0 \qquad (r=1...m)$$

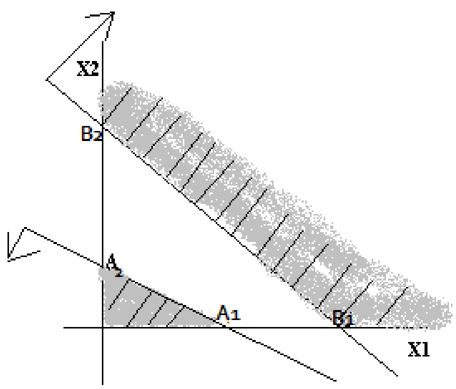
28) Problem degeneracije linearnog programiranja javlja se u slucajevima kada jedna ili vise bazicnih promjenljivih imaju vrijednost nula.Osnovni uzrok za pojavu ovog problema jeste suvisnost nekog od ogranicenja u modelu. Problem degeneracije prepoznajemo tako sto kod sprovodjenja **II Simpleks kriterijuma** dobijamo jednu ili vise jednakih minimalnih vrijednosti pa ne mozemo da se odlucimo koja promjenljiva napusta bazu. Obicno se uzima ona koja ima najveci imenilac, a ukoliko su i imenioci isti onda uzimamo proizvoljno.
Posledice degeneracije su te da promjenljiva koja je ostala u bazi u narednoj iteraciji uzima vrijednost nula pa je zakljucak da je jednačina ili nejednacina u kojoj se nasla ova promjenljiva predstavlja suvisno ogranicenje.
Osim toga, u sličaju postojanja degeneracije nože se pojaviti i problem ciklusa, odnosno slučaj da u toku rešavanja zadatka ponovo dobijemo rešenje istovjetno sa nekim od prethodnih.

29) Geometriski posmatrano optimalno rešenje problema maksimuma nalazi se u jednoj ekstremnoj tački konveksnog, ograničenog i zatvorenog skupa mogućih rešenja. Medjutim, u nekim sličajevima može se dogoditi da izračunato optimalno rešenje zadatka linearnog programiranja nije jedinstveno, odnosno da postoji višestruko optimalno rešenje.
Ukoliko postoji makar jedna razlika kod **I simpleks kriterijuma** ***Cj-Zj=0*** za prethodnu nebazičnu promjenjljivu ***Xj*** , dok su vrijednosti ovih razlika za ostele nebazične promjenjljive negativne, izračunato optimalno rešenje nije jedinstveno.
Geometriski , sličaj postajanja višestrukog optimalnog rešenja se javlja kada su koeficijenti pravca prave koja reprezentuje neko od ograničenja i koefijent pravca prave f-je cilja jednaki.
<u>Npr.</u>



Kao sto vidimo tacke konveksnog poligona ***0BMDC2*** predstavljaju moguca resenja zadatka. Prava koja reprezentuje f-ju cilja podudara se sa pravom koja predstavlja gornju granicu vrijednosti promjenljivih $\boldsymbol{X_1}$ ***i*** $\boldsymbol{X_2}$ za koje je zadovoljena prva nejednacina ogranicenja ***(A1,A2)*** na kojoj se nalaze tacke ***M i D*** . Na osnovu toga konstatujemo da se optimalno resenje naseg zadatka nalazi na tackama ***M i D***. Neposrednom provjerom tj. uvrstavanjem vrijednosti koordinata extremnih tacaka skupa mogucih resenja u f-ji cilja takodje bi se pokazalo da je predhodna tvrdnja tacna, jer bi dobili dvija ista iznosa.

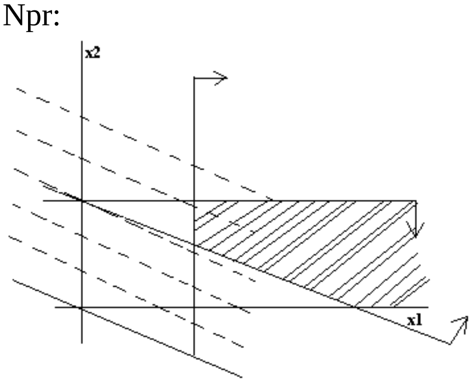
30) Prilikom formulisanja modela linearnog programiranja može se dogoditi da model bude tako postavljen da ne postoje moguća rešenja. Takav slučaj se dešava ukoliko ne postoje vrijednosti promjenjljivih za koje su zadovoljeni svi ograničavajući uslovi. Geometriski, takav zadatak ima prazan skup mogućih rešenja, odnosno ne može se naći nijedna tačka za koju su zadovoljene sve nejednačine (jednačine) sistema ograničenja modela. Rašavanjem ovakvog zadatka analiticki možemo konstatovati nepostojanje mogucih resenja u poslednjem bazicnom resenju gdje svi elementi ***I simpleks kriterijuma (Cj-Zj)*** pokazuju postojenje optimalnog rešenja, ali će se u bazi naći vještačka promjenjljiva, što je glavni indikator postojenja medjusobno kontradiktornih ograničavajućih uslova u zadatku.
Grafički prikaz:



31) Problem nemogućnosti odredjivanja konačnih vrijednosti promjenjljivih i f-je cilja u problemu maksimuma javlja se ukoliko je:
- Model formulisan tako da se jedna ili više promjenjljivih mogu povećavati neograničeno, a da ne bude narušen nijedan od ograničavajucih uslova zadatka i,

b) f-ja cilja na skupu mogućeh rešenja nema konačnu vrijednost (skup mogućih rešenja nije ograničen skup)

<u>Grafički prikaz</u>:
Npr:



Na osnovu grafičkoga prikaza vidimo da se promjenjljiva x1, a time i f-ja cilja, mogu neograničeno povećavati a da nijedan od uslova zadatka ne bude narušen. Neograničenost skupa mogućih rešenja ima za posledicu postojenje mogućnosti neograničenih vrijednosti promjenjljivih i f-je cilja.

Rješavajući problem maksimuma analiticki , problem mogućnosti postojanja neograničene vrijednosti f-je cilja i promjenjljivih konstatovat cemo u nekoj od iteracija u postupku odredjivanja promjenjljive koja treba da izadje iz baze. Da bi neka promjenjljiva izašla iz baze potrebno je da u odnosu na ostale vrijednosti ima najmanji pozitivni količnik drugog simpleks kriterijuma. Medjutim, ukoliko svi ovakvi količnici budu negativni ili nedefinisani, možemo konstatovati da problem nema konačno rešenje.

Npr. analiticki:

II- Simpleks kriterijum

$$\frac{x_2}{a_{25}} = \frac{5}{0} = \infty$$

$$\frac{x_1}{a_{15}} = \frac{5}{-} = -5$$

$$\frac{x_4}{a_{45}} = \frac{5}{-1} = -5$$

32) Onovna karakteristika dualnog simpeks metoda je što on polazi od nekog baznog rešenja koje nije nenegativno i uslova da je simpleks kriterijum za nebazične vektore **$(C_j - Z_j) \leq 0$** , za svako **j**. Ako ovaj uslov nije zadovoljen, , onda je potrebna dosta obimna procedura da bi se obezbijedio pomenuti uslov, neophodan za otpočinjanje dualnog simpleks metoda. Veoma često, korišćenje dualnog simpleks metoda, u rešavanju problema optimizacije ima niz prednosti u odnosu na druge algoritme simpleks metoda. Takvi su prije svega problemi minimizacije, kod kojih je potrebno uvoditi vještačke promjenjljive, zatim problemi post-optimalne analize, cjelobrojnog programiranja i td.

Neka je dat problem minimizacije

$$Z = cx$$
$$Ax \geq b$$
$$X = 0$$

gdje su **c** i **b** pozitivni vektori,

Ovaj problem se može riješiti pomoću simpleks metoda uvodjenjem dodatnih i vještačkih promjenjljivih. Medjutim, mnogo je jednostavnije da se transformiše u odgovarajući problem maksimizacije a zatim riješi pomoću **Dualnog Simpeks Metoda.**

Na osnovu pravila dualnog simpleks metoda, problem minimizacije postaje problem maksimizacije,

$$(max)Z = -cx$$
$$-Ax \leq -b$$
$$X \geq 0$$

odnosno,

$$(max)Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_px_p$$

$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1p}x_p \leq -b_1$$
$$-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2p}x_p \leq -b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mp}x_p \leq -b_m$$

$$X_1, x_2, \ldots x_p \geq 0$$

Uvodjenjem dodatne promjenjljive dobija se,

(max)Z= -c1x1 –c2x2-...-cpxp + 0xp+1 +...0xp+m

-a11x1 – a12x2-...-a1pxp+ xp+1 = -b1
-a21x1 – a22x2 - ...-a21xp +xp+2 = -b2
..
-am1x1 – am2x2-...-am1pxp +xp+m= -bm

X1, x2,...xp ≥ 0

33) U zadacima linearnog programiranja , pored uslova nenegativnosti, moze se postaviti još i dodatni zahtjev po kome , neke ili sve promjenjljive moraju uzimati vrijednost iz skupa cijelih brojeva. Zadaci linearnog programiranja u kojima se postavlja uslov cjelobrojnost promjenjljivih, svih ili nekih, jesu zadaci cjelobrojnog programiranja.

Marematički model cjelobrojnog programiranja:

(max) Z= Σ CjXj
ΣaijXj ≤ bi, (i=1,2...m)
Xj ≥ 0, (j=1,2...,p)
Xj-cijo broj j=1,2...,p,

Odnosno

(max)Z = ΣCjXj
ΣaijXj = bi, (i=1,2...m)
Xj ≥ 0, (j=1,2,...n)
Xj-cijo broj, j=1,2...n n1 ≥ n

U zavisnosti od toga kako je postavljen uslov cjelobrojnosti, razlikuju se dva tipa problema
a) ako je **n1= n** tj.ako sve promjenjljive moraju biti izražene u cijelim brojevima, radi se o potpunom cjelobrojnom programiranju
b) ako je **n1 < n** , radi se o djelimičnom cjelobrojnom programiranju.

Svi metodi koji se koriste za rešavanje zadatka cjelobrojnog linearnog programiranja, mogu se svrstati u tri grupe:
- Metod zaokruzivanja, čija je suština u zaokruživanju dobijenih rezultata. Naime, najprije se izračuna optimalno rešenje zadatka linearnog programiranja, zanemarujući uslov cjelobrojnosti, a zatim se izvrši zaokruživanje rezultata, zbog čega ovi metodi, najčešće daju rezultate koji su daleko od optimalnih.
- Metod enumeracije, koji se sastoji u tome da se prebroje (implicitno ili eksplicitno) sva moguća cjelobrojna rešenja. Proces pronalaženja rešenja sastoji se od etapa, tako da se u svakoj narednoj etapi usvaja bolje, od najboljeg rešenja na svim prethodnim etapama. Pošto je potrebno pretražiti veliki broj rešenja, problem je obiman i velika je mogućnost pojave greške.
-metod odsijecajućih ravni- ***GOMORIJEV METOD***. Ovaj metod leži na ideji o formiranju dodatnog ograničenja koje treba da „odsiječe“ dio konveksnog skupa mogućih rešenja u kome nama cjelobrojnog rešenja. Prvobitni sistem ograničenja se proširuje sa dodatnim ograničenjem, pa se u konačnom broju iteracija dolazi do optimalnog rešenja. Prema Gomorijevom metodu, prvo se, dati problem rešava simpleks metodom, ne uzimajući u obzir uslov cjelobrojnosti. Ako dobijeno rešenje zadovoljava i uslov cjelobrojnosti rešenje je optimalno, a ako rešenje ne ispunjava uslov

cjelobrojnosti, tada se formira dodatno ograničenje koje se priključuje postojećem sistemu ograničenja i primjenom Dualnog Simpleks Metoda , traži se novo optimalno rešenje.
Dodatno ograničenje treba da yadovolji sledeće uslove:
-svako dopustivo cjelobrojno rešenje zadatka cjelobrojnog programiranja, mora ostati dopustivo rešenje zadatka linearnog programiranja i posle dodavanja novog rešenja.
-dobijeno rešenje zadatka linearnog programiranja u svim sledećimo koracima mora postati nedopustivo, za isti zadatak posle dodavanja novog ograničenja.
Ukoliko ni ovakvo rašenje na zadovoljava uslov cjelobrojnosti, opet se formira , novo dodatno ograničenje i postupak se ponavlja dok se ne nadje rešenje koje zadovoljava uslov cjelobrojnosti.
Dodatno ograničenje se formira na osnovu teorije o ekvivalentnim brojevima.

a. neki broj **a** kongruentan broju **b , onda i samo onda** ako je njihova razlika cio broj;
b. b) razlomljeni dio broja **a** , definiše se kao najmanji cio brojkongruentan broju **a**;
c. c) ako je **a** kongruentan broju **b**, onda je i f(a) ≡ f(b)

34) Metod odsijecajućih ravni- **GOMORIJEV METOD**. Ovaj metod leži na ideji o formiranju dodatnog ograničenja koje treba da „odsiječe“ dio konveksnog skupa mogućih rešenja u kome nama cjelobrojnog rešenja. Prvobitni sistem ograničenja se proširuje sa dodatnim ograničenjem, pa se u konaćnom broju iteracija dolazi do optimalnog rešenja. Prema Gomorijevom metodu, prvo se, dati problem rešava simpleks metodom, ne uzimajući u obzir uslov cjelobrojnosti. Ako dobijeno rešenje zadovoljava i uslov cjelobrojnosti rešenje je optimalno, a ako rešenje ne ispunjava uslov cjelobrojnosti, tada se formira dodatno ograničenje koje se priključuje postojećem sistemu ograničenja i primjenom Dualnog Simpleks Metoda , traži se novo optimalno rešenje.
Dodatno ograničenje treba da yadovolji sledeće uslove:
- Svako dopustivo cjelobrojno rešenje zadatka cjelobrojnog programiranja, mora ostati dopustivo rešenje zadatka linearnog programiranja i posle dodavanja novog rešenja.
- Dobijeno rešenje zadatka linearnog programiranja u svim sledećimo koracima mora postati nedopustivo, za isti zadatak posle dodavanja novog ograničenja.

Ukoliko ni ovakvo rašenje na zadovoljava uslov cjelobrojnosti, opet se formira , novo dodatno ograničenje i postupak se ponavlja dok se ne nadje rešenje koje zadovoljava uslov cjelobrojnosti.
Dodatno ograničenje se formira na osnovu teorije o ekvivalentnim brojevima.
- Neki broj **a** kongruentan broju **b , onda i samo onda** ako je njihova razlika cio broj;
razlomljeni dio broja **a** , definiše se kao najmanji cio brojkongruentan broju **a**;
ako je **a** kongruentan broju **b**, onda je i **f(a)≡f(b)**

Kod zadatak iz potpunog cjelobrojnog programiranja, postavlja se uslov da je **n1 = n**, tj. Da sve promjenjljive u problemu moraju biti izražene u cijelim brojevima. Dodatno ograničenje se formire tako što se odabere bazična promjenjljiva iz optimalnog rešenja linearnog programiranja , koja sadrži najveći razlomljeni dio i obrazuje se jednačina u kojoj je bazična promjenjljiva **Xi** izražena svojom vrijednošću i linearnom funkcijom nebazičnih promjenjljivih **Xj**, tj.
Xi = bio – Σ aijXij
j€S
gdje je S-skup indeksa nebazičnih promjrnjljivih.
<u>Moguća su tri slučaja:</u>
a) sve vrijednosti **bio**, iz optimalnog rešenja linearnog programiranja, su cijeli brojevi. U tom slučaju rešenje zadatka linearnog programiranja je ujedno i rešenje zadatka cjelobrojnog programiranja.
b) sve vrijednosti **bio** iz optimalnog rešenja linearnog programiranja jisu cijeli brojevi, ali su koeficijenti **aij** cijeli brojevi za svako ***i, j€ I*** . u tom slučaju ne postoji cjelobrojno rešenje zadatka

c) postoje bar neke vrijednosti **bio** i **aij** , za ***i, j€ I*** , koje nisu cijeli brojevi. Tada se brojevi **bio** i **aij** mogu razložiti na cjelobrojni i razlomljeni dio, pri čemu je ,

bio = kio + fio

aij = kij + fij

gdje je

kio, kij cijeli dio brojeva **bio** i **aij**

fio, fij razlomljeni dio brojeva **bio** i **aij**, odnosno

0<fio<1

0<fij<1

Pa se dobija ***Xi = kio + fio – Σ (kij + fij) Xj,***

j€S

Odnosno,

Xi = [kio – Σ kijXj] +[fio - ΣfijXj]

j€S   j€S

pošto promjenjljiva **Xi** mora biti cijeli broj, onda je

fio - Σ fijXj <= 0

j€S

odnosno

n

Σ   fijXij >= fio

j=1

Gdje je:

fij decimalni dio broja aij

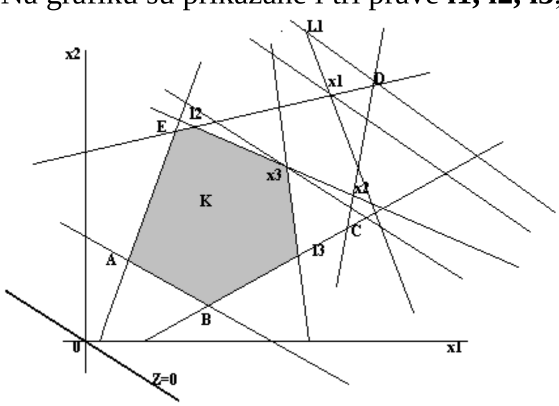
fio decimalni dio broja bio

i-indeks vrste sa najvećim decimalnim dijelom bazične promjenjljive

j- indeks nebazičnih promjenjljivih u poslednjoj simpleks tabeli, koje sadrže decimalni broj.

35) Grafički, svakom dodatnom ograničenju u **n** - dimenzionalnom prostoru, odgovara jedna hiperravan, koja, od skupa mogućih rešenja odsijeca jedan dio. U odsiječenom dijelu mnogougla nalazi se , optimalno necjelobrojno rešenje. Prilikom odsijecanja dijela mnodougla, sve tačke sa cjelobrojnim koordinatama ostaju u neodsiječenom dijelu mnogougla. Pošto se skup tačaka sa cijelim koordinatama neodsiječenog dijela mnogougla, poklapa sa skupom tačaka sa cijelim koordinatama početnog mnogougla, jasno je da ako optimalno rešenje zadatka linearnog programiranja ne neodsiječenom dijelu zadovoljava uslov cjelobrojnosti, to će ono biti i ujedno optimalno cjelobrojno rešenje.

Na grafiku su prikazane i tri prave **l1, l2, l3**, koje odgovaraju dodatnim, linearnim ograničenjima.



Svaka od njih odsijeca jedan dio skupa mogućih rešenja **K**. Tako, posle odsijecanja jednog dijela skupa **K**, sa pravom **L1**, optimalno rešenje postaje tačka **x1**, ograničenje **L2** odsijeca još jedan dio mnogougla **K**, a novo rešenje je tačka **x2**. na kraju, odsijecajući dio mnogougla pravom **L3**, dobija se optimalno cjelobrojno rešenje. To je tačka **x3**.

Nejednacina **fio-Σfijxj ≤ 0** na osnovu koje se formira dodatno ogranicenje

1) je linearna,
2) odsijeca nadjeno optimalno necjelobrojno resenje
3) ne odsijeca niti jedno cjelobrojno resenje

Dokaz

Linearnost dodatnog ogranicenja je ocigledna. Neka je **x*** optimalno necjelobr resenje zadatka i neka je u tom resenju koordinata **Xio** necjelobrojna . Pokazimo da ovo resenje zadovoljava uslov. Ukoliko je **x*** optimalno resenje tada je **xj* = 0i, xj*** pripada skupu **S**, pa je **Σfijxj = 0**, odnosno **fio ≤ 0** sto je u suprotnosti sa definicijom razlomljenog dijela nekog broja. Prema tome **x*** tj. optimalno resenje zadatka ne zadovoljava uslov **fio-Σfijxj≤0**.

Treci uslov…Predpostavimo da u zadatku postoji neka tacka **Xc*** sa cjelobrojnim koordinatama, koja ne zadovoljavaju uslov nego je

Fio-Σfijxj ≥ 0

kako je

Σfijxj≥0, i 0≤fio<1 to vazi 0≤fio-Σfijxj<1

sto je suprotno predpostavci da je velicina **(fio-Σfijxj)** za sva resenja zadatka **(max)Z = Σ CjXj** cio broj.

36) Ukoliko se u zadatku cjelobrojnog linearnog programiranja postavlja zahtjev po kome samo neke promjenjljive moraju uzimati cjelobrojne vrijednosti, radi se o problemima djelimičnog cjelobrojnog programiranja. U tom slučaju pored uslova nenegativnosti promjenjljivih, tj.

$$X_j \geq 0 \quad j=1,2\ldots n$$

postavlja se još i dodatni uslov, po kome je

$$X_j \text{- cio broj}, \quad j=1,2\ldots n_1;\ (n_1 < n)$$

Dodatno ograničenje, koje kod djelimičnog cjelobrojnog programiranja treba da obezbijedi uslov cjelobrojnosti, formira se na osnovu nejednačine

$$\sum_{j\in S} V_{ij}X_{ij} \geq f_{io}$$

pri čemu:

-ako promjenjljiva **xs** mora da bude cijeli broj

$$V_{ij} = \frac{f_{io}}{1-f_{io}}(1-f_{ij}), \text{ ako je } f_{ij} > f_{io}$$

$$V_{ij} = f_{io}, \text{ ako je } f_{ij} \leq f_{io}$$

-ako promjenjljiva **xs** ne mora da bude cijeli broj

$$V_{ij} = a_{ij}, \text{ ako je } a_{ij} \geq 0$$

$$V_{ij} = \frac{f_{io}}{1-f_{io}}|a_{ij}|, \text{ ako je } a_{ij} < 0$$

37) Nejednacina **fio - Σfijxj ≤ 0** na osnovu koje se formira dodatno ogranicenje

1) je linearna,
2) odsijeca nadjeno optimalno necjelobrojno resenje
3) ne odsijeca niti jedno cjelobrojno resenje

Dokaz

Linearnost dodatnog ogranicenja je ocigledna. Neka je **x*** optimalno necjelobrojno resenje zadatka

$$(max)Z = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j \qquad X_j \geq 0, \ (j= 1,2,\ldots n)$$

i neka je u tom resenju koordinata **Xio** necjelobrojna . Pokazimo da ovo resenje zadovoljava uslov

$$f_{io} - \sum_{j \in s} f_{ij} X_j \leq 0$$

Ukoliko je **x*** optimalno resenje tada je **xj* = 0, xj*** pripada skupu **S**, pa je **Σfijxj = 0**, odnosno **fio ≤ 0** sto je u suprotnosti sa definicijom razlomljenog dijela nekog broja. Prema tome **x*** tj. optimalno resenje zadatka

$$(max)Z = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j \qquad X_j \geq 0, \ (j= 1,2,\ldots n)$$

ne zadovoljava uslov $f_{io} - \sum_{j \in s} f_{ij}x_j \leq 0$

Treci uslov. Pretpostavimo da u zadatku

$$(max)Z = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j \qquad X_j - \text{cio broj}, \ j = 1,2,\ldots n \ \ (n1 \leq n)$$

postoji neka tacka X_c^* sa cjelobrojnim koordinatama, koja ne zadovoljavaju uslov uslov

$$f_{io} - \sum_{j \in s} f_{ij}x_j \leq 0$$

nego je

$$f_{io} - \sum_{j \in s} f_{ij}x_j \geq 0$$

kako je

$\sum f_{ij}x_j \geq 0$, *i* $0 \leq f_{io} < 1$ *to vazi* $0 \leq f_{io} - \sum f_{ij}x_j < 1$

sto je suprotno predpostavci da je velicina **(fio-Σfijxj)** za sva resenja zadatka **(max)Z = Σ CjXj** cio broj.

38) Ukoliko se u modelu linearnog programiranja, nakon odredjivanja optimalnog rešenja, promijeni neki od uslova zadatka, postavlja se pitanje da li nastale promjene dovode do promjene strukture vektorske baze na osnovu koje je odredjeno optimalno rešenje. Umjesto rešavanja kompletno novog zadatka koji bi formulisali uvodjenjem novih promjenljivih vrijednosti parametara modela, korišćenjem post-optimalne analize moguće je ispitati optimalnost prethodno izračunatog rešenja. Post-optimalna analiza predstavlja postupak koji se koristi za ispitivanje da li će promjena nekog od parametara uticati na promjenu već izračunatog optimalnog rešenja. Na osnovu primjene metoda post-optimalne analize, imajući u vidu nastale promjene u vrijednosti parametara modela, kao I već izračunato optimalno rešenje, može se doći do jednog od sledeća dva zaključka:

a) nastale promjenje u vrijednosti parametara modela neće dovesti do promjene vektorske baze na osnovu koje je odredjeno optimalno rešenje zadatka,
b) prethodno izračuneto optimalno rešenje u uslovima novih vrijednosti parametara modela ne može ostati optimalno, pri čemu se u postupku post-optimalne analize može identifikovati neophodna promjena vektorske baze koju treba učiniti da bi se dobilo poboljšano rešenje

upotrebom post-optimalne analize moguće je ispitati uticej sledećih parametara:
-promjena vrijednosti koeficijenata f-je cilja
-Promjena slobodnih članova sistema ograničenja
-promjena koeficijenata aij koji se u sistemu ograničenja nalaze uz promjenjljive (matrica A)

39) Promjenja vektora ***C***

Vector ***C*** problema

(max)Z = cx
Ax = b
X ≥ 0

sadrži koeficijente koji se nalaze uz sve promjenjljive zadatka. Nakon odredjivanja optimalnog rešenja može doci do promjene koeficijenata koji se nalze uz promjenjljive koje se ne nalaze u optimalnom rešenju, kao i promjene koeficijenata koji se nalaze uz bazične promjenjljive optimalnog rešenja. Zbog toga ispitivanje uticaja promjene vrijednosti elemenata vektora ***c*** realizujemo različito, zavisno da li se mijenjaju koeficijenti uz nebazične ili uz bazične promjenjljive optimalnog rešenja.

<u>Promjena koeficijenata nebazičnih promjenjljivih:</u>

Pretpostavimo da se koeficijent ***C*** koji se nalazi uz nebazicnu promjenljivu u f-ji cilja mijenja , pri cemu nastalu promjenu mozemo predstaviti oblikom $Cj^{+} = Cj + \Delta Cj$ da bi utvrdili da li u novim uslovima rjesenje izracunato na osnovu baze ***α -opt*** I dalje ostaje optimalno, neophodno je da provjerimo da li ce povecanje vrijednosti koeficijenta ***Cj*** dovesti do potrebe za uvodjenjem prethodno nebazicnog vektora ***aj*** u bazu. U tom cilju primjenjuje se Simplex kriterijum za ulazak u bazu sa novom vrijednoscu koeficijenta Cj^{+} , odnosno

$Cj^{+} - Zj = Cj + Cj\Delta - Zj = (Cj-Zj) + \Delta Cj$ ***... (j=1,....p)***

Da bi rjesenje odredjeno na osnovu baze ***αopt*** ostalo optimalno rjesenje neophodno je da konstatujemo da nijedan od nebazicnih vektora ne treba da udje u bazu, to ce se dogoditi ukoliko je:

$Cj^{+} - Zj \leq 0$ ***.............(j=1,......p)***

Odnosno ukoliko je

$(Cj - Zj) + \Delta Cj \leq 0$

Ukoliko se koeficijent uz nebazicnu promjenljivu smanjuje tada ne postoji mogucnost da se optimalno resenje promijeni. Ukoliko se ovaj koeficijent uvecava tj ukoliko je $\Delta Cj>0$ tada ce optimalno resenje ostati i dalje optimalno ukoliko je zadovoljen uslov:

$\Delta Cj < |Cj-Zj|$ ***(j=1..........p)***

Ukoliko je, medjutim vrijednost prirastaja koeficijenata koji se u f-ji cilja nalaze uz nebazicnu promjenjljivu *Xj* veci od apslutne vrijednosti I simpleks kriterijuma za vektor ***Aj*** , tj. ukoliko je

$\Delta Cj > |Cj-Zj|$ ***(j=1..........p)***

tada resenje nije vise optimalno vec se u cilju odredjivanja poboljsanog rjesenja neophodno u bazu ukljuciti prethodno nebazicni vektor ***Aj***.

Promjena koeficijenata baznih promjenljivih:

Da bi ispitali kako kako promjena vrijednosti koeficijenata koji se u funkciji cilja nalaze uz promjenljive iz optimalne baze utice na optimalnost resenja, treba utvrditi vrijednosti razlika $(C_j - Z_j)$ za nebazicne vektore. S obzirom da vrijednosti koeficijenata C_j $(j=1,...p)$ za nebazicne vektore ostaju neprimijenjene neophodno je izracunati i vrijednosti Z_j $(j=1....p)$ za sve nebazicne promjenljive.

Neka je C_b vektor koeficijenata koji se u f-ji cilja nalaze uz bazicne promjenljive iz optimalnog resenja. Pretpostavimo da je doslo do povecanja vrijednosti ovih koeficijenata za iznos ΔC_b. Novi vektor ovih koeficijenata je

$$C_b^+ = C_b + \Delta C_b$$

Vrijednosti Zj za nebazicne vektore bile su odredjene iz relacije

$$Z_j = C_b \bar{X}_j \qquad (j=1....p)$$

Gdje je $\bar{X}_j$ vektor koeficijenete linearne kombinacije bezicnih vektora i nebazicnog vektora A_j izracunat u obliku

$\bar{X}_j = \alpha_{opt}^{-1} A_j$ ostaje nepromijenjen

Vrijednosti Z_j u uslovima promijenjenih koeficijenata vektora C_b odredjujemo na sledeci nacin

$$Z_j^+ = C_b^+ \bar{X}_j = (C_b + \Delta C_b)\bar{X}_j = C_b\bar{X}_j + \Delta C_b\bar{X}_j = Z_j + \Delta Z_j \qquad (j=1,....p)$$

Uz petpostavku da se mijenjaju samo koeficujenti bazicnih promjenljivih, sto znaci da vrijednosti C_j ostaju nepromijenjene kriterijum optimalosti rjesenja ce biti

$C_j - Z_j^+ = C_j - (Z_j + \Delta Z_j) \leq 0$

ukoliko je

$\Delta Z_j > (C_j - Z_j) \qquad j=(1,...p)$

tada vec izracunato optimalno resenje ostaje i dalje optimalno, tj vektor A_j ne treba da udje u bazu.U suprotnom slucaju kada postoji makar jedna pozitivna razlika kriterijuma optimalnosti izracunato rjesenje vise nije optimalno resenje vec se u bazu novog rjesenja mora ukljuciti prethodno nebazicni vektor A_j za koju je ova razlika maximalno pozitivna.

40) Promjene elemenata vektora b (vektora slobodnih članova sistema ograničenja) možemo označiti sa Δb, tako da će novi vektori biti $b^+ = b + \Delta b$. Vrijednosti baznih promjenljivih su odredjene relacijom:

$X_b = \alpha_{opt} \bullet b$

Na osnovu čega vrijednosti baznih promjenljivih u uslovima izmijenjenog vektora b , tj. vektora b^+ , odredjujemo na sledeći način,

$X_b^+ = \alpha_{opt} \bullet b^+$

$X_b^+ = \alpha^{-1}_{opt} \bullet (b + \Delta b)$

$X_b^* = \alpha^{-1}_{opt} \bullet b + \alpha^{-1}_{opt} \bullet \Delta b$

Odakle je

$X_b^+ = X_b + \alpha^{-1}_{opt} \bullet \Delta b$

Ukoliko je za novodobijeno rešenje zadovoljen uslov $Xb^+ \geq 0$, rešenje i dalje ostaje optimalno. Ukoliko makar jedan od elemenata Xb^+ bude negativan, prethodno izračunato rešenje više neće biti moduće jer je narušen uslov nenegativnosti promjenjljivih.

41) Promjena elemenata matrice **A** tj. Promjena koeficijenata ***aij*** u sistemu ograničenja, može izazvati neophodnost promjene optimalnog rešenja, što se ispituje u postupku post-optimalne analize. U slučaju ovakve promjene u postupku post optimalne analize optimalnost rešenje u novim uslovima može biti ispitivana za različite promjene, i to:

- promjena nebazičnog vektora
- promjena bazičnog vektora
- uvodjenje novog vektora aktivnosti (nove promjenjljive)
- uvodjenje novog ograničenja

<u>Promjena nebazičnog vektora:</u> Ukoliko nakon odredjivanja optimalnog rešenja modela dodje do promjene elemenata nebazičnog vektora **Aj**, postupak ispitivanja optimalnosti realizujemo korišćenjem kriterijuma optimalnosti.

Neka Aj^+ predstavlja promijenjeni ***j-ti*** nebazični vektor. Da bi utvrdili da li taj vektor treba uključiti u bazu, odnosno da li optimalno rešenje treba mijenjati, izračunavamo vrijednosti

- +

$Xij = \alpha^{-1}_{opt} Aj^+$

Koje su nam neophodne radi odredjivanja vrijednosti Zj^+, u obliku

- +

$Zj^+ = CbXj$

Nakon čega , pretpostavljajući da su koeficijenti u f-ji cilja ostali nepromijenjeni, primjenjujemo kriterijum optimalnosti, odnosno izračunavamo razliku $Cj\text{-}Zj^+$. Ukoliko je $(Cj\text{-}Zj^+) \leq 0$ rešenje i dalje ostaje optimalno, a ako je $(Cj\text{-}Zj^+) \geq 0$ zaključak je suprotan.

<u>Promjena bazičnog vektora:</u> Ukoliko obeležimo promijenjeni ***i-ti*** vektor, koji se nalazi u bazi α^{-}_{opt} , sa $\mathbf{Ai}^+$, odnosno novu bazu sa α^+ . Rešenja za novu bazu će biti:

$Xb^+ = (\alpha^+)^{-1} \bullet b$

$Xj^+ = (\alpha^+)^{-1} \bullet Aj$

$Z^+ = CbXb^+$

$Zj^+ = CbXj^+$

Ukoliko je $Xb^+ \geq 0$ izračunato rešenje je moguće, a ukoliko su za takvo rešenje razlike $(Cj - Zj^+) \leq 0$, rešenje Xb^+ je optimalno. Ako je rešenje moguće , ali postoji makar jedna pozitivna vrijednost kriterijuma optimalnosti za nebazične vektore, takvo rešenje nije optimalno. Ukoliko u okviru vektora Xb^+ postoji makar jedna negativna vrijednost, prethodno optimalno rešenje u uslovima izmijenjenog bazičnog vektora više nije čak ni moguće rešenje.

<u>Uvodjenje dodatnog ograničenja:</u> ukoliko pretpostavimo da je u sistem jednačina

$(max)Z = cx$

$Ax=b$

$X \geq 0$

dodato još **t** jednačina, odnosno u osnovni oblik modela (sa nejednačinama) **t** jednačina oblika

$a_{m+1,1}X_1 + ... + a_{m+p,p}X_p \leq b_{m+1}$

..

$a_{m+t,1}X_1 + ... + a_{m+t,p}X_{p1} \leq b_{m+t}$

ovakva promjena uticat će na neophodnost proširivanja vektora aktivnosti sa dodatnih t komponenti. Nakon toga, ispitivanje optimalnosti rešenja odredjenog na osnovu baze α^{-}_{opt} realizuje se na uobičajan način. Proširena matrica ima oblik

$$\alpha^{+} = \begin{matrix} \alpha_{opt} & 0 \\ T & I \end{matrix}$$

Gdje **T** predstavlja matricu koeficijenata dodatnih ograničenja sa kojima su prošireni bazični vektori iz optimalnog rešenja, **I** jediničnu matricu, a **0** - nula matricu.
Na osnovu nove baze dobija se:

$$X^{+}_{B} = (\alpha^{+})^{-1} \bullet b$$

$$X^{+}_{j} = (\alpha^{+})^{-1} \bullet Aj$$

i postupak ispitivanja optimalnosti rešenja realizuje se dalje na uobičajan način.

42) Svrha parametarskog programiranja je odredjivanje intervala u kome se mogu mijenjati parametri sistema, ali tako da struktura optimalnog rešenja ostane nepromijenjena. U standardnom zadatku linearnog programiranja svi koeficijenti koji se pojavljuju u modelu su konstantne velicine, medjutim posmatrane u vremenu, one mogu bilti vrlo varijabilne.
Ako cijena nekog proizvoda ima sezonski karakter onda ce ona biti funkcija vremena **t** , tako da se funkcija cilja sastoji iz dva dijela konstantnog ***(ΣCj Xj)*** i promjenjljivog ***(Σ(dj t)Xj)*** koji zavisi od parametra **t.**
Ako pretpostavimo da je zavisnost cijene od vremena linearna, tada f-ja cilja ima oblik:

$$(max)Z=\sum_{J=1}^{P}(Cj+dj)Xj$$

Gdje su ***Cj*** i ***Dj*** konstantni vektori, **t-** proizvoljan parametar koji moze da uzima vrijednost iz intervala ***(td, tg)***, pri cemu je ***td***- donja granica a ***tg***- gornja granica posmatranog intervala.

Ako su resursi izrazeni u f-ji vremena **t**, tada zadatak parametarskog programiranja ima oblik

$$(max)Z=\sum_{J=1}^{p}CjXj$$

i ograničenja $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}Xj \leq b_j \qquad (i=1.....m)$

$$Xj \geq 0 \qquad (j=1.......p)$$

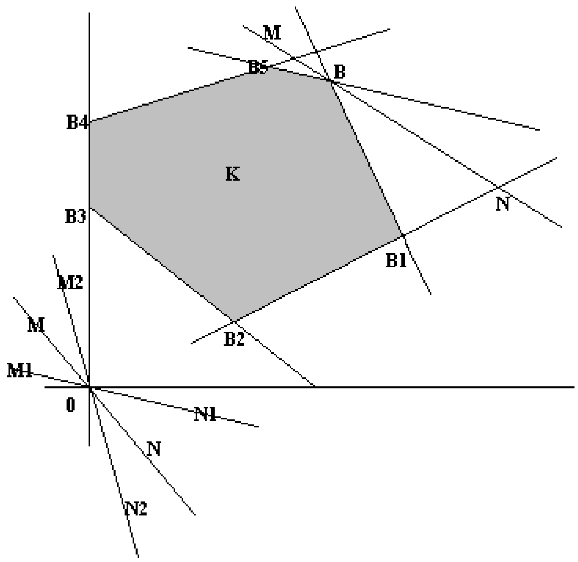
<u>Geometriska interpretacija:</u>
Neka je dat zadatak parametarskog programiranja

$$(max)Zt = \sum_{j=1}^{p} (Cj + djt)\, Xj$$

$$\sum_{j=1}^{p} aijXj \leq bi, \quad (i=1,2,...n)$$

$$Xj \geq 0, \qquad (j=1,2,...p)$$

Sistem ograničenja obrazuje konveksni skup mogućih rešenja ***K*** , koji je predstavljen mnogouglom ***B-B1-B2-B3-B4-B5***



Za ***t=0*** i ***Zt=0***, f-ja cilja dobija oblik

$$\sum_{J=1}^{p} C_j X_j = 0$$

Odnosno predstavlja pravu ***MN*** koja prolazi kroz koordinatni početak. Ekstremnu vrijednost f-ja cilja dostiže u tački ***B*** , jer je u toj tački prava ***MN*** paralelna sa pravom ***M'N'. Tačka B*** će biti ekstremna tačka i za sve vrijednosti parametra t za koje će se grafik f-je cilja, tj. Prava MN nalaziti izmedju pravih ***M1N1 paralelno sa BB5 i M2N2 paralelno sa BB.***
Ako je za ***t=t1*** grafik f-je cilja prava ***M1N1***, a za ***t = t2***, grafik f-je cilja prava ***M2N2***, tada će ***B*** biti ekstremna tačka za sve vrijednosti parametra **t** u intervalu $t_2 \le t \le t_1$.
Ako parametar ***t*** uzima vrijednosti koje se nalaze izvan intervala $t_2 \le t \le t_1$, dobija se novo optimalno rešenje, odnosno tačka ***B*** veše neće biti ekstremna tačka.

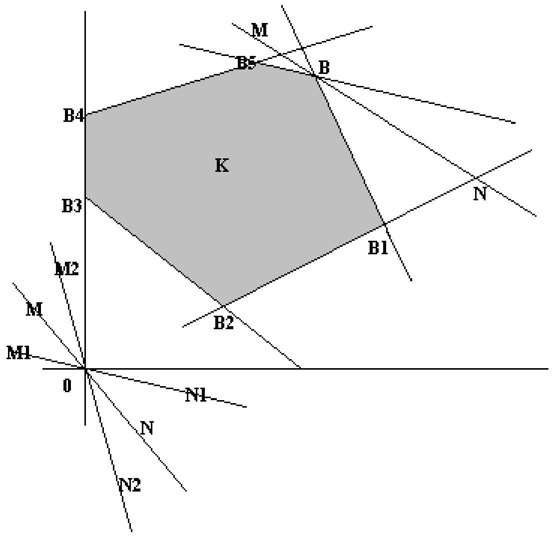
43) Geometriska interpretacija:
Neka je dat zadatak parametarskog programiranja

$$(\max)Z_t = \sum_{j=1}^{p} (C_j + d_j t)\, X_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} X_j \le b_i, \quad (i=1,2,...n)$$

$$X_j \ge 0, \qquad (j=1,2,...p)$$

Sistem ograničenja obrazuje konveksni skup mogućih rešenja ***K*** , koji je predstavljen mnogouglom ***B-B1-B2-B3-B4-B5***



Za ***t=0*** i ***Zt=0***, f-ja cilja dobija oblik

$$\sum_{J=1}^{p} C_jX_j = 0$$

Odnosno predstavlja pravu ***MN*** koja prolazi kroz koordinatni početak. Ekstremnu vrijednost f-ja cilja dostiže u tački ***B*** , jer je u toj tački prava ***MN*** paralelna sa pravom ***M'N'. Tačka B*** će biti ekstremna tačka i za sve vrijednosti parametra t za koje će se grafik f-je cilja, tj. Prava MN nalaziti izmedju pravih ***M1N1 paralelno sa BB5 i M2N2 paralelno sa BB.***

Ako je za ***t=t1*** grafik f-je cilja prava ***M1N1***, a za ***t = t2***, grafik f-je cilja prava ***M2N2***, tada će ***B*** biti ekstremna tačka za sve vrijednosti parametra **t** u intervalu ***t2 ≤ t ≤ t1.***

Ako parametar ***t*** uzima vrijednosti koje se nalaze izvan intervala ***t2 ≤ t ≤ t1*** , dobija se novo optimalno rešenje, odnosno tačka ***B*** veše neće biti ekstremna tačka.

44) Ako u zadatku parametarskog programiranja parametar t, varita u intervalu ***t € [t_d , t^g]*** ,zadatak je da se interval ***t€ [t_d , t^g]*** , podijeli na konačan broj manjih intervala, tako da za svaku vrijednost parametra ***t***, iz tih intervala, f-ja cilja dostiže maksimalnu vrijednost u jednoj i samo jednoj tački skupa mogućih rešenja **K**.

Algoritam za rešavanje zadataka parametarskog programiranja sastoji se iz dvije etape:

1. potrebno je parametru **t** dodijeliti neku fiksnu vrijednost, najbolje jednaku donjoj granici, ili **t=0**. tada ce u f-ji cilj svi koeficijenti postati fiksni tj. dobiće se standardni zadataka linearnog programiranja. Zatim je potrebno naći tačku u kojoj f-ja cilja **Ztd**, odnosno **Ztg**, dostiže maksimum.
2. u drugom koraku je potrebno odrediti sve vrijednosti parametra **t**, za koje f-ja cilja **Zt** dostiže maksimum u nadjenoj tački. Nadjeni interval se isključi iz intervala ***[t_d , t^g]*** , pa se za interval koji je ostao opet rešava zadatak linearnog programiranja.

45) U planiranju optimalnog obima proizvodnje veliku ulogu imaju relativni pokazatelji, kao što su npr. cijena koštanja, ekonomičnost, rentabilnost i sl. Matematičke f-je koje se odnose na ove i sl. pokazatelje imaju razlomljeno linearni oblik. tj.

$$Z=\frac{\sum_{j=1}^{p} CjXj}{\sum_{j=1}^{p} tjXj} = \frac{Z_1(x)}{Z_2(x)}$$

ako se ovako definisanoj f-ji cilja doda i sistem ograničenja,

$$\sum_{j=1}^{p} ajXj \leq bi, \quad i=(1,2....m) \quad j=(1,2....p)$$

$$Xj \geq 0, \quad j=1,2....p$$

dobija se standardni zadatak razlomljenog linearnog programiranja.

Imenilac f-je cilja može se interpretirati kao vrijednost ulaganja za ostvarivanje programa proizvodnje **x**, dok brojilac predstavlja ekonomski efekat tog ulaganja. Prema tome, problem se sastoji u odredjivanju programa proizvodnje **x** koji će obezbijediti da odnos efekata i investicija bude što veći. Radi se dakle o problemu maksimizacije efikasnosti investicija.

Razlomljeno linearno programiranje ima značajnu ulogu u optimizaciji ekonomskih problema zbog toga što su relativni pokazatelji važniji od apsolutnih, pa modeli razlomljenog linearnog programiranja ne zaostaju za modelima linearnog programiranja.

Za razmatranje ekonomskih problema, potrebno je uvesti još dva ograničenja:

1) skup mpgućih rešenja zadatka linearnog programiranja nije prazan i ograničen je, sto znaci da nijedna od ekonomskih aktivnosti koja se pojaljuje u modelu ne moze biti neogranicena
2) imanilac f-je cilja mora biti različit od nule. Ako bi se desilo da je imenilac f-je cilja negativan, on se moze prebaciti u brojilac, pa se zato i uvodi ogranicenje da je $Z2(x) > 0$. ovo ogranicenje omogucava da se iskljuci mogucnost dobijanja neodredjenog programa.

46) Na bilo kom pravolinijskom odsjecku koji pripada skupu K(skup mogucih resenja), razlomljena linearna funkcija je monotona.

Dokaz;

Neka su **x’** i **x”** krajnje tacke skupa mog resenja. Posmatrajmo tacku **x** koja predstavlja konveksnu kombinaciju tacaka **x’** i **x”**,odnosno

$$X = \lambda x' + (1-\lambda) x'', \; 0 \leq \lambda \leq 1$$

Posto se svaka koordinata tacke **x** moze izraziti u vidu konveksne kombinacije tacaka **x’** i **x”**,broilac fje cilja ce biti

$$Z1(x) = c1x1 + c2x2 +\ldots+ cpxp = c1[\lambda x'1+(1-\lambda)x1'']+\ldots+cp[\lambda xp'+(1-\lambda)xp'']= \lambda[c1x1'+\ldots+cpxp']+(1-\lambda)[c1x1''+\ldots+cpxp'']=\lambda Z1(x')+(1-\lambda)Z1(x'').$$

Analogno se dobija I za imenilac pa fja cilja dobija oblik

$$Z=\lambda Z1(x')+(\lambda-1)Z1(x'')/\lambda Z2(x')+(1-\lambda)Z2(x'')$$

Kako su **x’** i **x”** konstantne velicine, u izrazu je promjenljiva samo velicina **λ** pa je **Z** razlomljeno linearna fja koja zavisi od parametra $\lambda(0\leq\lambda\leq1)$.Da bi dokazali monotonost fje **Z** na datom odsjecku potrebno je utvrditi znak izvoda **dZ/dλ.**

$$Dz/d\lambda = [z1(x')-z1(x'')]+[\lambda z2(x')+(1-\lambda)z2(x'')]-[\lambda z1(x')+(1-\lambda)z1(x'')]*[z2(x')-z2(x'')]\backslash[\lambda z2(x')+(1-\lambda)z2(x'')]^2$$

Ako se u broiocu predhodnog razlomka izvrse potrebne rac radnje a imenilac izrazi u obliku $[z2(x)]^2$ dobija se

$dz\backslash d\lambda = z1(x')z2(x'')-z1(x'')z2(x')\backslash[z2(x)]^2$
broilac ne zavisi od **λ**,pa je za konstantne velicine **x'** i **x''** i on konstantan, dok je imenilac kao kvadrat neke velicine uvijek pozitivan. Zbog toga znak izvoda zavisi od znaka broioca koji ce na datom odsjecku biti ili poz. ili neg. Posto izvod ne mijenja znak slijedi da je fja cilja monotono rastuca ili opadajuca, sto je trebalo I dokazati.

47) Ako f-ja cilja dostiže ekstremnu vrijednost istovremeno u nekoliko ekstremnih tačaka konveksnog skupa mogućih rešenja, onda ona dostiže ekstremnu vrijednost I u svim tačkama koje se mogu izraziti kao konveksna kombinacija ekstremnih tačaka.
Dokaz:
Neka f-ja cilja **Z** dostiže maksimum u **K** ekstremnih tačaka $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,…. $x^{(n)}$, konveksnog skupa, odnosno:

$$Z(max) = \frac{Z_1(x^{(1)})}{Z_2(x^{(1)})} = \frac{Z_1(x^{(2)})}{Z_2(x^{(2)})} = \ldots = \frac{Z_1(x^{k)})}{Z_2(x^{k)})}$$

Proizvoljnu tačku **x** izrazimo kao konveksnu kombinaciju **K** ekstremnih tačaka, tj.

$$X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \ \Sigma\lambda_i = 1$$

Odnosno koordinate tačke **x** su:

$$X_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \ldots + \lambda_k x_1^{(k)}$$
$$X_2 = \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)} + \ldots + \lambda_k x_2^{(k)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_p = \lambda_1 x_p^{(1)} + \lambda_2 x_p^{(2)} + \ldots + \lambda_k x_p^{(k)}$$

Kada se sistem pomnoži sa C_n i uvrsti u broilac f-je cilja, a nakon toga pomnoži sa t_p i uvrsti u imanilac f-je cilja, dobija se oblik:

$$Z(max) = \frac{\lambda_1 Z_1(x^{(1)}) + \lambda_1 Z1(x^{(2)}) + \ldots + \lambda_k Z1(x^{k)})}{\lambda_1 Z2(x^{(1)}) + \lambda_1 Z_2(x^{(2)}) + \ldots + \lambda_k Z2(x^{k)})}$$

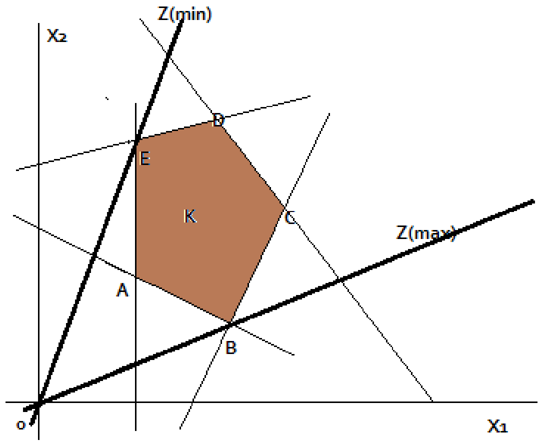
slijedi da je

$$Z(max) = \frac{\lambda_1 Z_{max} Z_2(x^{(1)}) + \lambda_2 Z_{max} Z2(x^{(2)}) + \ldots + \lambda_k Z_{max} Z2(x^{k)})}{\lambda_1 Z2(x^{(1)}) + \lambda_1 Z_2(x^{(2)}) + \ldots + \lambda_k Z2(x^{k)})}$$

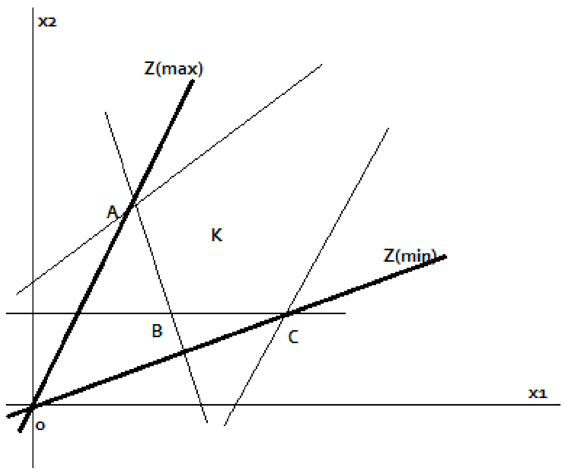
tj. $Z(x) = Z_{max}$
pa je iznos f-je cilja u bilo kojoj ekstremnoj tački konveksnog skupa maksimalan, što je trebalo i dokazati.

48) Najjednostavniji nacin odredjivanja optimalnog resenja u zadatku razlomljenog linearnog programiranja je graficki metod, ali su mogucnosti njegove primjene ogranicene, jer se on moze primijeniti smo u slucaju kada u zadatku postoje dvije realne promjenjljive.
Pri resavanju zadatka grafickim metodom mogu nastupiti sledeci slucajevi:

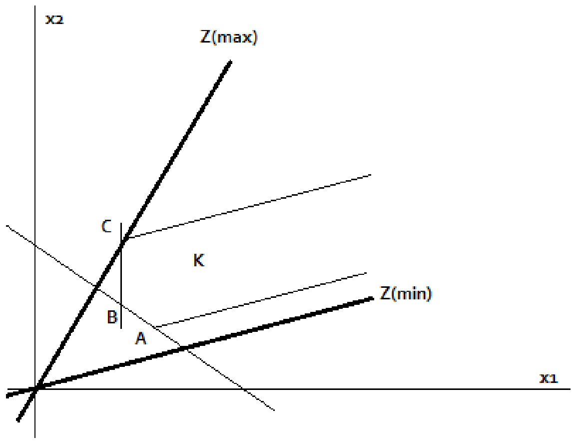
1) skup mogucih resenja je ogranicen. F-ja cilja dostize maksimalnu vrijednost



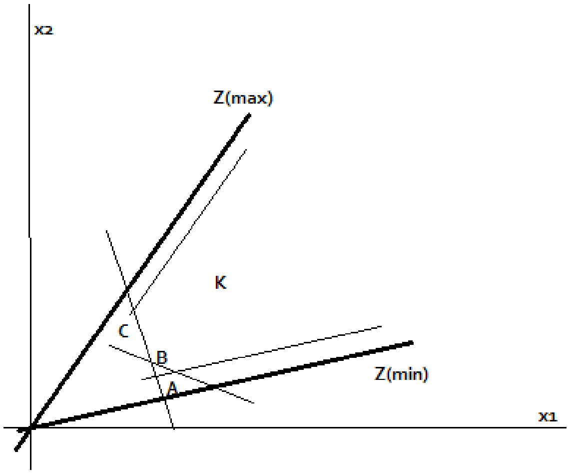
2) Skup mogucih resenja je neogranicen . f-ja cilja dostize maksimalnu I minimalnu vrijednost



3) Skup mogucih resenja je neogranicen. F-ja cilja dostize samo maksimalnu vrijednost. Prava ***X2=kx1*** zauzima polozaj paralelan jednom ogranicenju , pa f-ja cilja ima takozvani asimptomski minimum.



4) Skup mogucih resenja je neogranicen, oba ekstremuma su asimptotska



49) U cilju odredjivanja optimalnog rešenja, tj. ekstremnih tačaka skupa mogućih rešenja, za razlomljenu linearnu f-ju cilja, oblika

$$Z = \frac{c1x1 + c2x2}{t1x1 + t2x2}$$

uz postajanje sistema linearnih ograničenja, potrebno je:

1) grafički predstaviti prave koje reprezentuju nejednačine sistema ograničenja
2) identifikovati skup mogućih rešenja **(K)** tj.konvekstan skup
3) da bi utvrdili tačke u kojima f-ja cilja dostiže evrijednost, potrebno je izraziti f-ju cilja u obliku
   $x_2 = kx_1$, pri čemu je $k = \frac{c_1 - Zt_1}{Zt_2 - c_2}$
   funkcija $x_2 = kx_1$ geometrijski predstavlja pravu koje prolazi kroz koordinatni pocetak I zavisi od velicine Z
4) utvrditi karakter zavisnosti koeficijenata pravca prave $x_2 = kx_1$ od veličine **z**, preko izvoda **dk/dz**, tj.
   $$dk = \frac{-t_1(zt_2 - c_2) - t_2(c_1 - zt_1)}{(zt_2 - c_2)^2} = \frac{c_2t_1 - c_1t_2}{(zt_2 - c_2)^2}$$
   imenilac izvoda, kao kvadrat neke veličine, je uvijek pozitivan a brojilac izvoda ne zavisi od **z**, pa izvod ima konstantan znak tj. pri povećanju vrijednosti **z**, **k** će ili da raste ili da opada, a prava $x_2 = kx$ će se okretati samo u jednu stranu. Ako je znak izvoda negativan prava se okreće u pravcu skazaljke na satu, a ako je pozitivan u pravcu suprotno skazaljci na satu .
5) izračunati coordinate ekstremnih tačaka I vrijednost f-je cilja u tim tačkama.

50) Ukoliko f-ja cilja ima oblik

$$Z = \frac{c1x1 + c2x2 + c0}{t1x1 + t2x2 + t0}$$

neka je $x1 = \alpha + x1'$
$x2 = \beta + x2'$

zamjenjujući, f-ja cilja dobija oblik

$$Z = \frac{c_1\alpha + c_2\beta + c_1x_1' + c_2x_2' + co}{t_1\alpha + t_2\beta + t_1x_1' + t_2x_2' + to}$$

onda za **α** i **β** odredimo takve vrijednosti koje će zadovoljiti jednačine

$c_1\alpha + c_2\beta + co = 0$

$t_1\alpha + t_2\beta + to = 0$

posle odgovarajućih zamjena dobija se f-ja cilja

$$Z = \frac{c_1x_1' + c_2x_2'}{t_1x_1' + t_2x_2'}$$

i ograničenja

$a_{11}x_1' + a_{12}\, x_2' \leq (b1 - a11\alpha - a12\beta)$

$a_{21}x_1' + a_{22}\, x_2' \leq (b2 - a21\alpha - a22\beta)$

……………………………………...

$A_{m1}x_1' + a_{m2}\, x_2' \leq (bm - am1\alpha - am2\beta)$

Grfički metod odredjivanja optimalnog rešenja zadatka linearnog programiranja čija je f-ja cilja sa slobodnim članom , sastoji se od sledećih aktivnosti:

1) u koordinatnom sistemu $x_1 0 x_2$ grfički predstaviti prave koje reprezentuju nejednačine sistema ograničenja
2) identifikovati skup mogućih rešenja
3) nacrtati grafik prave koje reprezentuje imanilac f-je cilja, I provjeriti da li je zadovoljen uslov da je $Z2(x) \neq 0$
4) izračunati coordinate novog koordinatnog početka
5) utvrditi coordinate ekstremnih tačaka I znak izvoda
6) izračunati vrijednost f-je cilja u ekstremnim tačkama

51) Martoš je prvi uočio da se problem razlomljenog linearnog programiranja može riješiti simpleks metodom. Za razliku od standardnog problema maksimuma kod linearnog programiranja, koeficijenti f-je cilja kod razlomljenog linearnog programiranja upisuju se u prvoj simpleks tabeli u dvije vrste. U vrsti ***Z1*** upisuju se koeficijenti brojioca f-je cilja, a u vrsti ***Z2*** se upisuju koeficijenti imenioca.

Simpleks tabela sadrži još jednu vrstu označenu sa **dj**, pri čemu je,

$$dj = \frac{Co}{to}\;\frac{Cj - Zj}{tj - Zj} = Co\,(tj - Zj) - to\,(Cj - Zj), \quad j=1,2\ldots,p$$

$do = Co / to$

gdje veličina $\mathbf{d_o}$ označava vrijednost f-je cilja.

U početnom bazičnom rešenju vrijednost realnih promjenjljivih su jednake nuli, vrijednosti dodatnih promjenjljivih slobodnim članovima sistema ograničenja, a vrijednost f-je cilja je

$$Zo = \frac{Z1^{(0)}}{Z2^{(0)}} = \frac{Co}{to}$$

U cilju dobijanja optimalnog rešenja potrebno je učiniti nekoliko iteracija. U svakoj iteraciji se vrsi izmjena vektorske baze sve dok se ne dodje do optimalnog resenja. Kriterijum optimalnosti kod problema maksimuma je $dj > 0$, a kod problema minimuma $dj < 0$.

52) Čarns-Kuperov metod je analiticki metod razlomljenog linearnog programiranja. On se saatoji od standardnog simplex metoda resavanja zadataka tipa linearnog programiranja.

Neka je dat problem:

$$(max)Z= \frac{c_1x_1 + c_2x_2 +...+c_px_p+c_0}{t_1x_1 + t_2x_2 +...+t_px_p+t_0}$$

uz ograničenja

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +...+a_{1p}x_p \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +...+a_{2p}x_p \le b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +...+a_{mp}x_p \le b_m$$

$$x_1, x_2,.....x_p \ge 0$$

razmotrit cemo slučaj kada je

$$Z_2(x)= t_1x_1 + t_2x_2 +...+t_px_p + t_0 > 0$$

Uvedimo zamjenu po kojoj je

$$\frac{1}{t_1x_1 + t_2x_2 +...+t_px_p+t_0} = y_0$$

f-ja cilja sada ima oblik

$$(max)Z = c_1x_1y_0 + c_2x_2y_0 +...+c_px_py_0+c_0y_0$$

Uvodeći smjenu po kojoj je

$$x_1y_0=y_1, \quad x_2y_0= y_2....... x_py_0= y_p$$

f-ja cilja postaje

$$(max)\ Z= c_1y_1 + c_2y_2 +...+c_py_p+c_0$$

Množeci ograničenja sa y_0 dobija se

$$a_{11}x_1y_0 + a_{12}x_2y_0 +...+a_{1p}x_py_0 \le b_1y_0$$
$$a_{21}x_1y_0 + a_{22}x_2y_0 +...+a_{2p}x_py_0 \le b_2y_0$$
$$..$$
$$a_{m1}x_1y_0 + a_{m2}x_2y_0 +...+a_{mp}x_py_0 \le b_my_0$$

odnosno slijedi:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 +...+a_{1p}y_p - b_1y_0 \le 0$$
$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 +...+a_{2p}y_p - b_2y_0 \le 0$$
$$..$$
$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 +...+a_{mp}y_p - b_my_0 \le 0$$

iz uslova se dobija

$$t_1x_1y_0 + t_2x_2y_0 +...+t_px_py_0+t_0y_0 = 1$$

prethodne transformacije su omogućile da se problem razlomljenog linearnog programiranja transformiše u sledeći problem linearnog programiranja

$$(max)\ Z= c_1y_1 + c_2y_2 +...+c_py_p+c_0$$

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 +...+a_{1p}y_p - b_1y_0 \leq 0$$
$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 +...+a_{2p}y_p - b_2y_0 \leq 0$$
$$...$$
$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 +...+a_{mp}y_p - b_my_0 \leq 0$$
$$t_1x_1y_0 + t_2x_2y_0 +...+t_px_py_0+t_0y_0 = 1$$

53) **Nemoguce odkucati !**

54) Transportni problem predstavlja model čijim se korišćenjem odredjuje optimalan program distribucije odredjene vrste robe iz mjesta ponude do mjesta tražnje. Kao kriterijum za optimizaciju programa transporta robe najčešće se uzima zahtjev za minimizacijom ukupnih transportnih troškova, iako se i kao kriterijum može uzeti i minimizacija ukupnog vremena transporta robe. Transportni problem se može posmatrati kao specijelan oblik zadatka linearnog programiranja, u kome f-ja cilja izražava ukupne transportne troškove, dok su ograničavajući uslovi odredjeni ponudom pojedinih ishodišta, odnosno tražnjom odredišta.
Osim za optimizaciju transporta robe , transportni problem se može efikasno koristiti za rešavanje problema lokacije, kao i problema rasporedjivanja. Formulisanje i rešavanje problema lokacije primjenjuje se u slučaju potrebe za odredjivanjem optimalne lokacije: mašina u predizeću, skladišta, pojedinih službi i sl.
<u>Osnovni elementi transportnog problema su:</u>
- količina robe koja se transportuje
- transportni troškovi po jedinici prevezene robe,
- raspoloživa količina robe (ponuda)
- iznos tražnje za posmatranom robom.

55) U cilju formulisanja opšteg oblika transportnog problema pretpostavimo da postoji konačan broj ishodišta (mjesta ponude) ***P1, P2,...Pm*** koja raspolažu odredjenom vrstom robe za kojom postoji tržnja u n odredišta ***T1, T2...Tn.***
Ukoliko raspolažemo podacima o količini ponude robe i količini tražnje, tada transportni problem zahtijeva odredjivanje kombinacije puteva i odgovarajućih količina za prevoz robe za koje će se ostvariti minimalni troškova.
<u>Osnovni elementi transportnog problema su:</u>
- količina robe koja se transportuje
- transportni troškovi po jedinici prevezene robe,
- raspoloživa količina robe (ponuda)
- iznos tražnje za posmatranom robom.
Metodološki posmatrano osnovni cilj rešavanja transportnog problema može se formulisati kao zahtjev za odredjivanje optimalnih vrijednosti promjenjljivih , na pojedinim putevima, za koje će se ostvariti minimalna vrijednost ukupnih transportnih troškova.
<u>Pri tome moraju biti zadovoljena tri ograničenja:</u>
1) ukupna količina raspoložive robe svakog ishodišta more biti raspodijeljena na mjesta tražnje
2) tražnja svakog ishodišta mora biti u potpunosti zadovoljena
3) količine prevezene robe na pojedinim putevima, odnosno odgovarajuće promjenjljive moraju biti nenegativne veličine.

56) Kod otvorenog modela transporta ukupna tražnja nije jednaka ukupnoj ponudi, tj.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

s toga razlikujemo dva oblika otvorenog transportnog problema kada je ukupna ponuda veća od ukupne tražnje

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

i kada je ukupna ponuda manja od ukupne tražnje

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Otvoreni model transportnog problema rešava se slično rešavanju zadataka Linearnog programiranja gdje su ograničavajući uslovi dati u obliku nejadnačina. Sistem nejednačina koji izražava uslove zadatka u pogledu ponude i tražnje transformiše se u sistam jednačina uvodjenjem dodatnih promjenjljivih. Tabelarno rešava se uvodjenjem fiktivne vrste ako je ukupna ponada manja od ukupne tražnje, odnosno uvodjenjem fiktivne kolone ako je obrnuto.

57) Broj linearno nezavisnih jed sistema ogranicenja transportnog problema je ***m+n-1***
Dokaz:
Predpostavimo da imamo kombinaciju vrijednosti promjenljivih ***Xij*** za koje znamo da zadovoljavaju sve jednacine sistema ogranicenja izuzev, npr. prvu jednacinu. Ukoliko su za ***Xij*** zadovoljene svih preostalih ***m+n-1***, tada je sigurno zadovoljena i prva jednacina. Ocigledno je da lijevu strana prve jednacine ogranicenja mozemo predstaviti u obliku:

$$\Sigma Xij=\Sigma\Sigma Xij-\Sigma\Sigma Xij$$

Kako je za svako ***Xij*** zadovoljeno svih ***m+n*** jednacina sistema ogranicenja, tj $\Sigma Xij=a_i\ (i=1,..,m)$ i $\Sigma Xij=bj\ (j=1,\dots n)$ to jednakost mozemo predstaviti u obliku
$\Sigma xijj = \Sigma\Sigma Xij - \Sigma\Sigma Xij = \Sigma bj - \Sigma ai = a1$. Na taj nacin je
$\Sigma xij = a1$ tj zadovoljena je I prva jednacina sistema ogranicenja. Isto bi mogli dokazati za bilo koju drugu od preostalih jednacina sistema.

58) Zato sto poznati stavovi i teoreme linearnog programiranja ističu činjenicu da u bilo kom bazičnim rešenju mora imati tačno ***m+n – 1*** bazičnih promjenjljivih. To znači da će u svakoj tabeli koja reprezentuje neko bazično moguće rešenje biti popunjeno ***m+n – 1*** polja, dok će preostali ***mn – (m+n- 1)*** polja ostati prazna, odnosno odgovarajuće promjenjljive će biti jednake nili.

59) Postupak odredjevanja početnog bazičnog rešenja kod problema transporta predstavlja početno rasporedjivanje ponudjene robe od strane pojedinih ishodišta na različita mjesta tražnje. Pri tome bez obzira na način odredjivanja početnog rešenja neophodno je da ukupne količine robe po vrstama I kolonama odgovaraju ukupno izkazanim iznosima ponude I tražnje, kao I da ukupno popunjenih polja bude tačno m+n-1.
Od različitih metoda koji se mogu koristit za odredjivanje početnog bazičnog rešenja možemo navesti tri:

- Metod sjeverozapadnog ugla, koji predstavlja takav postupak odredjivanja početnog bazičnog rešenja u kome rasporedjivanje količina robe za prevoz započinjemo iz lijevog gornjeg ugla tabele. Nakon toga u ***m+n-1*** koraka idući dijagonalno rasporedjuju se količine robe u različita polja.
- Metod minimalnih troškova podrazumijeva prevashodno korišćenje puteva kojima odgovaraju najmanji troškovi po jedinici prevezene robe, čime se i započinje popunjavanje tabele. Neizmjeničnim popunjavanjem praznih polja kojima odgovaraju najmanji transportni troškovi, u ***m+n-1*** koraka dolazi se do početnog bazičnog rešenja
- Vogelov aproksimativni metod, predstavlja najsloženiji postupak odredjivanja početnog bazičnog rešenja. Suština ovog metoda sastoji se u izračunavanju potencijalnih gubitaka koji će nastati ukoliko se izmadju dva polja sa minimalnim transportnim troškovima koristi ono polje u kojem su transportni troškovi veći.

Postupak se započinje izračunavanjem vrijednosti razlika izmedju dva minimalna troška za svaku vrstu I kolono, nakon čega odredjujemo vrstu ili kolonu kojoj odgovara najveća vrijednost elementa. Početnu količinu rasporedjujemo u polje sa nejnižim troškovima, koje odgovara vrsti ili koloni sa najvećom ovako izračinatom razlikom.

60) Degeneracija kod transportnog problema nastaje kada dobijeno resenje ne sadrzi ***(n+m-1)*** bazicnih promjenljivih. Ovakav slucaj se javlja kada je parcijalni iznos neke ponude jednak iznosu traznje. Prilikom odredjivanja pomenutog resenja degeneracija se javlja kada istovremeno dodje do eliminisanja i vrste i kolone.

Slučaj degeneracije može se pojaviti prilikom odredjivanja početnog bazičnog rešenja, kao i u postupku poboljšavanja nekog programa transporta u proceduri optimizacije. Prilikom odredjivana početnog bazičnog rešenja dageneracija se javlja u sličaju kada popunjavanjem nekog od polja istovremeno eliminišemo raspoložive količine odgovarajuće vrste i kolone. U postupku optimizacije , kada u nekoj od iteracija odredjujemo poboljšano rešenje, sličaj degeneracije se javlja kada u jednom koraku isključimo uz baze dvije promjenjljive, a u bazu uključimo samo jednu prethodno nebazičnu promjenjljivu.

Otklanjanje problema degeneracije se vrsi tako sto se u prazno polje unosi kolicina od ***ε (epsilon)*** jedinica, a ***ε (epsilon)*** je veoma mali pozitivni br. ***ε*** se najcesce unosi u prazno polje kojem odgovaraju nejnizi troskovi transporta.

61) Stepping stone metod (metod skakanja s kamena na kamen) se u literaturi može naći i pod drugima nazivima kao: metod raspodjele, distributivni metod, metod šahovske kugle i sl. Suština ovoga metoda sastoji se u postupku ispitivanja uticaja potencijalnog korišćenja nezauzetih polja tabele na „kvalitet“ rešenja, odnosno na ukupne transportne troškove. Ova metoda daje odgovor na sledeća pitanja:

- da li je početno bazično rešenja optimalno?
- koji je put izmjene početnog bazičnog rešenja (ukoliko nije optimalno) koji će obezbijediti dobijanje poboljšanog programa transporta robe?

Metod skakanja s kamena na kamen, primjenjuje se tako što se „skakanjem“ za sveko prazno polje tabele koje predstavlja početno bazično rešenje obrazuje poligon čija se sve tjemena, izuzev početnog, nalaze u popunjenim poljima. Svi uglovi ovako formiranog poligona, koji ima paran broj tjemena, su pravi. Za svako prazno polje može se formirati samo jedan poligon, u kome imamo nejmanje 4, a najviše m+n tjemena. Na osnovu ovako formiranog poligona, za sveko prazno polje tabele izračunavamo tkz. relativne koeficijente troškova koji pokazuju za koliko jedinica će se ukupni troškovi transporta povećati (smanjiti) ukoliko u odgovarajuće polje uvrstimo jednu jedinicu prevezene robe. Relativne koeficijente troškova izračunavamo tako što od transportnog troška koji odgovara početnom polju naizmjenično oduzimamo i dodajemo jedinične transportne troškove koji se nalaze na tjemenima poligona. Pozitivna vrijednost ovako izračunatog relativnog koeficijenta troškova, pokazat će da bi angažovnje dovelo do povećanja ukupnih transportnih troškova, dok je u slučaju njegove negativne vrijednosti zaključak suprotan. Prema tome, postojenje makar jednog negativnog relativnog koeficijenta troškova pokazuje da početno bazično rešenje nije optimalno.

62) Metod potencijala (MODI metod) prestavlja postupak za odredjivanje optimalnog programa transporta robe, na osnovu već odredjenog početnog programa transporta. Suština ovog metoda, sastoji se u ispitivanju mogućnosti poboljšavanja već dobijenog programa transporta, koji se transformiše u optimalno rešenja. Postupak primjene metoda potencijala podrazumijeva odredjivanje po jednog takozvanog množitelja za svaku od jednačine ponude i tražnje sistema ograničenja modela transporta. Množitelji za jednačine ponude u_i $(i=1,....m)$ i množitelji za jednačine tražnje v_j $(j=1,...n)$ – odnosno za odgovarajuće vrsta i kolone tabele - odredjuju se tako da je za svaku bazičnu promjenljivu, tj.popunjeno polje, zadovoljen uslov

$$Cij=ui + vj \qquad i=1,....m \qquad j=1,...n$$

S obzirom da ovako odredjenih množitelja ima $m+n$, dok je broj bazičnih promjenljivih u bilo kom od rašenja $m+n-1$, pa jednom od množitelja dodjeljujemo pzitivnu vrijednost (obično nula). Preostali množitelji se izračunavaju rešavanjem m+n-1 jednačina $Cij = ui + vj$, pri čemu je polje (i,j) popunjeno.

Postupak optimizacije metodom potencijala je:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} cijXij$$

$$\sum_{j=1}^{n} xij=\alpha_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} Xij=b_j$$

ukoliko tada i-tu jednačinu ponude pomnožimo množiteljem u_i $(i=1,...n)$, j-tu jednačinu tražnje množiteljem Vj $(j=1,...m)$ i oduzmemo od f-je cilja dobija se

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(Cij - ui - Vj)Xij = Z - \left(\sum_{i=1}^{m} aiui + \sum_{j=1}^{n} bjVj\right)$$

a sada u jednakosti izvršimo smjenu prema kojoj je

$$Cij' = Cij - ui - Vj$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\, ui + \sum_{j=1}^{n} b_j y_j = Zo$$

možemo pisati

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXij = Z - Zo$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij} = \Delta Z$$

<u>da bi odredili optimalan program transporata robe metodom potencijala neophodno je :</u>
- odrediti početni program transporta robe
- odrediti množitelje za sve vrste i kolona
- izračunati potencijale za svako prazno polje
- i koristeći polje sa najmanjom negativnom vrijednošću potencijala odrediti poboljšani program transporta.

Ovaj postupak se realizuje uzastopnim iteracijama.

63) U situaciji kada nije zadovoljen uslov o postojanju jednakosti izmedju ponude i tražnje, tj. kada je:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

tada kažemo da se radi o otvorenom transportom problemu. Kako ukupna ponuda može biti manja ili veća od ukupne tražnje, razlikujemo i dva različita oblika otvorenog transportnog problema, i to: otvoreni model transporta u kome je ukupna ponuda veća od ukupne tražnje

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

i kada je ukupna ponuda manja od ukupne tražnje

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

otvoreni model transportnog problema rešava se slično rešavanju zadataka Linearnog programiranja gdje su ograničavajući uslovi dati u obliku nejadnačina. Sistem nejednačina koji izražava uslove zadatka u pogledu ponude i tražnje transformiše se u sistam jednačina uvodjenjem dodatnih promjenjljivih. Tabelarno rešava se uvodjenjem fiktivne vrste ako je ukupna ponada manja od ukupne tražnje, odnosno uvodjenjem fiktivne kolone ako je obrnuto.

64) Kod transportnog problema polazi se od prepostavke da postoji **m-**ishodišta i **n-**odredišta, da su sva ishodišta neposredno povezana sa odredištima i da prevoz od odredošta do ishodišta nije moguć. Medjutim , često navedene pretpostavke nisu realne zato što neki punktovi imaju mogućnost i potrebu i da "uvoze" i da" izvoze" robu. Ovakvi i slični problemi spadaju u grupu problema transporta na mreži.

Transportna mreže se definiše kao skup čvorova i skup veza na kojima se odvija neka transportna djelatnost. Pod čvorovima se podrazumijevaju gradovi, raskrsnice ulica, aerodromi, željezničke stanice i sl. Punktovi su u mreži povezani komunikacijama. To mogu biti ulice, drumske saobraćajnice, vazdušni putevi i sl.

Prilikom kretanja izmedju punktova u nekoj transportnoj mreži , problem se sastoji u odredjivanju optimalnog puta, pri čemu optimalan put može da bude definisan kao najkraći put, najduži put, put sa najvećim kapacitetom, najjeftiniji put, i td.

Ako se sa **P** opznači proizvoljan skup elemenata, a sa **K** skup svih uređenih parova, koji su sastavljeni od različitih elemenata skupa **P**, tada skupovi **P i K** posmatrani zajedno definišu transportnu mrežu. Elementi skupa **P** nazivaju se tjemena, punktovi ili čvorovi transportne mreže.
Sva tjemena transportne mreže dijele se na:
- Tjemena proizvodnje
- Tjemena potrošnje
- Tranzitna tjemena

U tjemenima proizvodnje veličina je pozitivna, u tjemenima potrošnje je negativna a u tranzitnime tjemenima jednaka je nuli.
Elementi skupa **K** nazivaju se komunikacije, grane ili lukovi transportne mreže. Komunikacija kod koje je jedan te isti punkt i početni i završni naziva se petlja.
Jedna od važnih osobina mreže je orjentacija njenih komunikacija. Ukoliko su sve veze u transportnoj mreži orjentisane, mreža se zove ***orjentisana mreža.***
Za svaku komunikaciju vezana su dva broja: ***propusna moć komunikacije***- koja pokazuje kolika je maksimalna kolicina robe koja se moze prevesti tom komunikacijom ***i troškovi prevoza*** jedinice robe koja se transportuje.

65) Metodi koji se koriste za rješavanje transportnih problema u matričnoj formi, mogu se koristiti i za rješavanja transportnih problema na mreži. Jedan od njih je Kantorovič – Gavurinov metod.
Pretpostavke od kojih polazi u ovom metodu su da je:
- propusna moć komunikacija dovoljno velika
- da cijena prevoza jedinice robe po komunikaciji ne zavisi od smjera prevoza

Rješavanje transportnog problema na mreži sa neograničenim kapacitetom komunikacija počinje određivanjem početnog bazičnog rješenja.
Pri određivanju početnog bazičnog rješenja potrebno je proizvoljno odabrati jedan punk, iz koga treba transportovati maksimalno moguću količinu robe, komunikacijom koja je najjeftinija. Dostava robe se označava strelicom a njen smjer odgovara smjeru prevoza a ispod strelice se upisuje količina robe koja se prevozi.
<u>Osobine početnog bazičnog rješenja su da se:</u>
- Sve ponude iz punktova proizvodnje raspoređuju u punktove potrošnje.
- U svaki punkt mora da ulazi iz njega izlazi po jedna strelica.
- Ukupan broj strelica mora biti jednak broju tjemena, umanjenom za jedan.
- Strelice ne moraju da obrazuju zatvoreni poligon.

Dobijeno bazično rješenje se provjerava u smislu da li je optimalno ili ne. U tu svrhu se koristi metod potencijala. Naime, najprije se početnoj tački proizvoljno pridruži potencijal sa vrijednoštu koja je veća od najvećih troškova prevoza.
Veza između potencijala za dva susjedna tjemena se uspostavlja preko jednačine
Ui + Cij = uj
ukoliko je smjer kretanja od ***Pi*** ka ***Pj***. Istim postupkom se određuju i preostali potencijali, pri čemu se uzima u obzir smjer strelica.
Ako smjer kretanja odgovara smjeru komunikacije, tada je
Uj = ui + Cij
A ako je smjer suprotan od smjera komunikacije tada je
Ui = Uj – Cij
Uslovi optimalnosti transportnog problema na mreži su isti kao i kod klasičnog transportnog problema.Rješenje optimalno ako su ispunjeni uslovi:

$u_j – u_i \leq C_{ij}$, za $X_{ij} = 0$
$u_j – u_i = C_{ij}$, za $X_{ij} > 0$

66) Kod transportne mreže sa organičenim propusnim sposobnostima komunikacija, svakoj komunikaciji se pridružuju po dva broja to su:
- Troškovi prevoza jedinice robe po komunikaciji i
- Propusna sposobnost komunikacije.

Na transportnoj mreži ova dva broja se pišu u obliku razlomka **Cij/dij**.
Ako sa ui označimo potencijal tjemena ***Pi*** a sa uj potencijal tjemena ***Pj***, smjer komunikacije koja ide od tjemena ***Pi*** ka tjemenu ***Pj*** označimo sa **Kij**, uslovi optimalnosti bazičnog rješenja na transportnoj mreži sa ograničenim sposobnostima su :
$u_j – u_i \leq C_{ij}$, ako je $X_{ij}=0$
$u_j – u_i = C_{ij}$, ako je $0 < X_{ij} \leq d_{ij}$
$u_j – u_i \geq C_{ij}$, ako je $X_{ij}=d_{ij}$
Uslov optimalnosti može se napisati u obliku
$u_j – u_i \geq C_{ij} + \delta_{ij}$, za $X_{ij}=d_{ij}$

67) **Teorija igara** predstavlja matematičku teoriju i metodologiju koja se koristi za analizu i rješavanja konfliktnih situacija u kojima učesnici imaju suprostavljene interese. **Igra** predstavlja uprošćeni model konflikta koji obuhvata ukupnost pravila ponašanja učesnika u igri, koja opredjeljuju njihove moguće poteze kao i potencijalne rezultate njihovog izbora. Potencijalne rezultate predstavljamo funkcijom plaćanja koja predstavlja numerički izraz dobitka odnosno gubitka učesnika neke igre.
Osnovna karakteristika teorije igara sadržana je u činjenici da veličina rezultata koji će pojedini igrači ostvariti u igri ne zavisi samo od njihovog izbora već i od izbora ostalih igrača. Svaki od igrača poznaje alternative koje mu stoje na raspolaganju u toku igre, koje nazivamo straregijama. Strategija predstavlja ukupnost pravila ponašanja igrača i potencijalne rezultate izbora pojedinih alternativa u svakoj situaciji.
Svaka igra se realizuje preko poteza, pri čemu potez predstavlja jedan izbor moguće alternative od strane igrača. Skup većeg broja poteza obrazuje **partiju**.
Zavisno od međusobnog odnosa igrača sve igre dijelimo na **kooperativne i nekooperativne**. **Kooperativne igre** predstavljaju takvu vrstu igara u kojima igrači formiraju koalicije koje im služe za međusobno usklađivanje ponašanja i izbor pojedinih strategija koje im obezbjeđuju povoljan rezultat. U koliko u toku igre ne postoji koordinacija od strane igrača, takva igra predstavlja nekooperativnu, tj. Antagonističku igru.
Prema karakteru funkcije plaćanja sve igre dijelimo na igre sa nultom i igre sa nenultom sumom, dok za potrebe matematičkog modeliranja se koristi igra ekstezivnog oblika.

68) Proste matične igre možemo objasniti analizirajući igru dva igrača sa nultom sumom u normalnoj formi, za slučaj kada svakom od igrača stoji na raspolaganju određeni broj strategija. Prepostavimo da imamo igru u kojoj učestvuju dva igrača **A i B**, pri čemu igrač **A** raspolaže sa **m** čistih straregija dok igrač **B** raspolaže sa **n** čistih strategija. Ukoliko pretpostavimo da je igra determinističkog tipa, izboru svakog para mogućih straregija od strane igrača **A i B** odgovara rezultat koji pokazuje dobitak jednog (igrača A) odnosno drugog igrača (B). Tako ćemo rezultat igre za slučaj izbora para strategija (Aj, Bj) predstaviti vrijednošću **aij**, koji pokazuje koliko iznosi dobptak igrača **A** odnosno gubitak igrača **B**. Ukoliko je **$a_{ij} < 0$** ova vrijednost pokazuje da će igrač **A** morati platiti igraču **B**, pa je dobitaj za igrača **A** negativan, što znači da termine dobitak i gubitak treba uslovno prihvatiti.

U cilju ostvarivanja najpovoljnijeg rezultata u igri svaki od igrača vrši analizu mogućih dobitaka odnosno gubitaka. Igrač **A** za svaku svoju čistu strategiju određuje minimalan dobitak koji će ostvariti bez obzira na izbor straterije igrača **B** tj. opredjeljuje minimalan elemenat svake od vrsta matrice plaćanja u obliku:

$$\alpha = min\alpha_{ij} \quad i= 1....m$$

Između svih ovako određenih dobitaka za pojedine strategije, igrač **A** bira maksimalan elemenat u obliku:

$$\alpha= max\ \alpha_i = maxmin\ \alpha_{ij}$$

Koji predstavlja maksmin vrijednost, odnosno donju granicu vrijednosti igre koja predstavlja garantovani dobitak koji će igrač **A** ostvariti. Donja granica vrijednosti igre određuje optimalnu strategiju za igrača **A.**

Sličnu analizu izbora strategija vrši i igrač **B,** koji se trudi da u igri odabere strategiju koja mu obezbjeđuje minimizaciju gubitka. Zato za svaku od svojih strategija igrač **B** izračunava maksimalne gubitke a zatim bira minimalan od ovako određenih elemenata, odnosno vrijednost

$$\beta j = min\ \beta j = minmax\ \alpha_{ij}$$

Predstavlja gornju granicu vrijednosti igre, odnosno minimaks vrijednosti za igrača **B**.

Ukoliko je u matričnoj igri donja granica vrijednosti igre jednaka gornjoj granici, takva igra je ptosta matrična igra i nazivamo je igrom sa ***sedlastom tačkom.***

69) Mješovita strategija predstavlja kombinaciju različitih vjerovatnoća sa kojima će igrači u uzastopnom nizu poteza igrati pojedine strategije koje im stoje na raspolaganju. U koliko je igra dva lica sa nultom sumom definisana matricom plaćanja ***(m,n)***, u kojoj igrač A može izabrati bilo koju od m strategija, njegovu mješovitu strategiju možemo predstaviti u vidu vektora $X= (x_1, x_2, ...x_m)$ čiji elementi pokazuju vjerovatnoće sa kojima igrač **A** primjenjuje strategije. Kako su elementi vektora koji predstavlja mješovitu strategiju igrača **A** vjerovatnoće izbora pojedinih strategija, to mora biti zadovoljeno.

$$Xi \geq 0 \quad (i=1,2....m), \quad \sum_{i=1}^{m} xi=1$$

Analogno, mješovitu strategiju igrača **B** možemo predstaviti u obliku $y = (y_1 , y_2 , ...y_n)$ čiji elementi pokazuju vjerovatnoće izbora igrača ***B*** neke od njegovih strategija, pri čemu je

$$yj \geq 0 \quad (j=1,2....m), \quad \sum_{i=1}^{n} yj=1$$

Strategije igrača ***A i B*** za koje su vjerovatnoće ***Xi i Yj*** veće od nule predstavljaju aktivne strategije.

70) Do rješenja mješovitih matičnih igara, dolazi se na osnovu namjere svakog od igrača da ostvari takvu mješovitu strategiju koja će mu obezbijediti optimizaciju igre tj. Ostvarivanje najboljeg rezultata. Primjenom principa minimaksa izbor optimalne mješovite strategije od strane igrača **A,** koji ćemo objeležiti sa **X*,** njemu obezbjeđuje maksimizaciju očekivanog dobitka. Na osnovu toga u koliko krajni rezultat- vrijednost igre obilježimo sa V, tada izbor optimalne mješovite strategije **X*** igraču **A** obezbjeđuje dobitak koji ne može biti manje od vrijednosti igre tj.

$$f (x^*,y) = \sum^{n} xi^*\alpha ij \geq v \quad j= 1...n$$

gdje veličina $f (x^*,y) = maxmin\ f (x,y) =\alpha$ predstavlja donju granic vrijednosti igre.

Slično, izbor optimalne mješovite straterije ***Y**** za igrača ***B*** znači da njegov gubitak neće biti veći od vrijednosti igre, odnosno

$$f(x,y^*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq v \quad i = 1...m$$

gdje je $f(x,y^*) = \min\max f(x,y) = \beta$ gornja granica vrijednosti igre.

Zadatak rješenja matrične igre, u situaciji kada se ne radi o prostoj matičnoj igri, jeste određivanje optimalnoh mješovitih strategija igrača i odgovarajuće vrijednosti igre.

71) Igra dva igrača sa nultom sumom kod koje igrač **A i B** mogu birati jednu od dvije strategije koje im stoje na raspolaganju definisana je matricom plaćanja oblika **2x2.**

$$P = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

Čiji elementi pokazuju dobitke igrača A odnosno gubitke igrača **B**. U postupku rješavanja bilo koje igre, tako i igre **2x2**, prvo se ispituje da li se mogu izborom maksmin i minmaks vrijednosti opredijeliti optimalne čiste strategije i vrijednosti igre. U koliko na takav načine ne odredimo vrijednost radi se o prostoj matričnoj igri u kojoj vrijednost igre odgovara vrijednosti elemenata predstavljaju sedlastu tačku. Da bi igra reda **2x2** predstavljala mješovitu matičnu igru neophodno je da predpostavimo da su obje strategije za igrače A i B aktivne. Ovo će biti zadovoljeno ukoliko je za elemente matrice plaćanja zadovoljen uslov za $a_{11} > a_{12}$, imamo da je $a_{21} < a_{22}$ i obrnuto.

Optimalne mješovite strategije možemo predstaviti u obliku

Za igrača **A**

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 = v$$

$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 = v$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

Nakon izjednačavanja njihovih lijevih strana imamo da je

$$a_{11} x_1 + a_{21}(1-x_1) = a_{12} x_1 + a_{22} x_2 (1-x_1)$$

Na osnovu čega je

$$X1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$X2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

Vrijednost igre koju dobijamo zamjenom izračunatih vrijednosti je

$$V = \frac{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

U koliko slično prethodnom izračunamo gornju granicu igre koju će igrač **B** ostvariti u slučaju izbora prve i druge strategije od strane igrača **A** dobićemo sistem jednačina:

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = v$$

$$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 = v$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

Odakle dobijamo optimalne mješovite strategije za igrača **B**

$$y1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

$$y2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

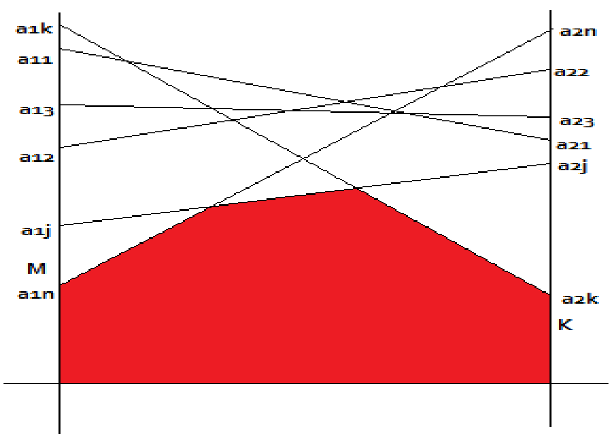
72) Rješavanje igara kod kojih je matrica plaćanja predstavljena matricom reda ***(2,n) i (m,2)*** veoma je slično sa postupkom određivanja mješovitih strategija ***2x2.*** Generalno, rješavanje ovakvih vrsta igara realizuje se tako što se grafičkim predstavljanjem mogućih rezultata igre za igrača koji ima dvije strategije opredjeljuju aktivne strategije njegovog protivnika, na osnovu kojih se izračunava vrijednost igre i optimalne strategije.

Posmatrajmo igru koja je definisana matricom plaćanja

$$P = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \end{matrix}$$

Iz koje vidimo da igrač **A** raspolaže sa dvije, dok igrač **B** može birati bilo koju od n strategija koje su mu na raspolaganju.

Grafik

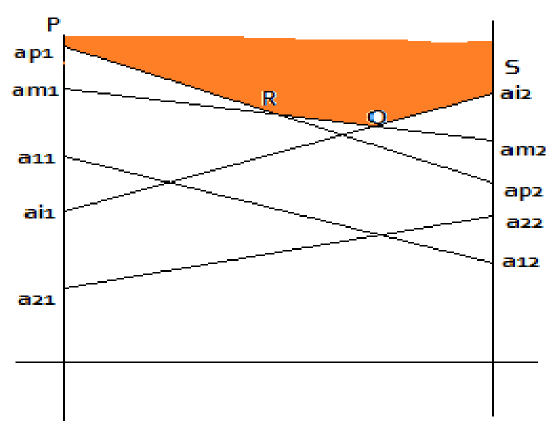


Sličan postupak rješavanja igre primjenjujemo u slučaju ***mx2***. Da bi predstavili postupak određivanja optimalnih strategija i vrijednosti igre predpostavimo da je igra predstavljena matricom plaćanja:

$$P = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{matrix}$$

Da bi odredili aktivne strategije na osnovu kojih dolazimo do rješenja grafički predstavljamo potencijalne gubitke igrača **B** za izbor različitih čistih strategija od strane igrača **A**.

Grafik



73) U koliko u igri ne postoje čiste strategije, matricu plaćanja pokušavamo uprostiti i svesti je na jedan od oblika ***2x2, nx2, 2xm*** koji nam omogućava jednostavan grafički i analitički postupak rješavanja. Jedan od najčešće korišćenih postupaka je postupak redukcije matrice plaćanja primjenog tzv. Pravila dominacije.
Predpostavimo da je igra predstavljena matricom plaćanja

$$P = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} \\ ...... & ..... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ..\ a_{mn} \end{matrix}$$

U kojoj vrste reprezentuju strategije igrača **A**, a kolone strategije igrača **B**.
Racionalno ponašanje igrača **A** podrazumijeva njegovo nastojanje da maksimalno uveća dobitak. Zbog toga igrač **A** nikada neće igrati one strategije koje su lošije u odnosu na bilo koju od preostalih strategija. Tako, u koliko u matrici plaćanja elementi neke ***k-te*** vrste nisu manju od elemenata neke ***i-te*** vrste, to dobitak za igrača **A** ne može biti manji u koliko izabere strategiju **Ak** u odnosu na dobitak ostvaren izborom strategije **Ai,** bez obzira koju će strategiju igrati igrač **B**. Zbog toga strategija **Ak** je pogodnija za igrača **A** u odnosu na **Ai**, zbog čega strategiju **Ak** smatramo dominantnom, a strategiju **Ai** dominiranom strategijom. Igrač **A** nikada nege izabrati dominiranu strategiju pa zbog toga vrstu matrice plaćanja koja predstavlja dominiranu strategiju možemo eleminisati.
Analogno za igrača **B** u koliko elementi **r-te** kolone nisu veći od elemenata **s-te** kolone, tada je za njega povoljnije da bira strategiju **Br** u odnosu na **Bs**. Ovakva eliminacija nema uticaja na konačno rješenje igre.

74) U slučaju postojanja mješovitih strategija, analitički postupak određivanja vrijednosti igre i optimalnih strategija svodi se na rješavanje sistema n+m nejednačina. Ukoliko je matrica plaćanja predstavljena u obliku.

$$P = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} \\ ...... & ..... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ..\ a_{mn} \end{matrix}$$

Za igrača A u uslovima ostvarivanja optimalne mješovite strategije imamo da je

$$\sum_{i=1}^{n} xi^{*} \alpha ij \geq v \quad j=1...n$$

Pri čemu je

$$\sum_{i=1}^{n} xi^{*} = 1$$

Slično za igrača B mora biti zadovoljeno

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha ij\ yj^{*} \leq v \quad i=1...m$$

$$\sum_{i=1}^{n} yj^{*} = 1$$

Gdje **V** za igrača **B** predstavlja gornju granicu vrijednosti igre.

Uslove možemo predstaviti na sljedeći način

$a_{11}X_1+a_{21}X_{2.}+....am_1X_m \geq v$

$a_{12}X_1+a_{22}X_{2}+.....am_2X_m \geq v$

....

$a_{1n}X_1+a_{2n}X_2+.....a_{mn}X_m \geq v$

$x1 + x2 +...+xm = 1$

Da bi izvršili transformaciju i lijevu i desnu stranu svih nejednačina i posljednje jednačine podijeli ćemo sa **v**. Nakon podjele dobijamo

$a_{11}t_1+a_{21}t_{2.}+....am_1\,t_m \geq 1$

$a_{12}t_1+a_{22}t_{2}+.....am_2t_m \geq 1$

....

$a_{1n}t_1+a_{2n}t_2+.....a_{mn}t_m \geq 1$

$t1 + t2 +...+tm = 1/v$

Nakon dodavanja uslova nenegativnosti možemo predstaviti model u obliku

$(min) = t1 + t2 +....+tn$

$a_{11}t_1+a_{21}t_{2.}+....am_{1m} \geq 1$

$a_{12}t_1+a_{22}t_{2}+.....am_2t_m \geq 1$

....

$a_{1n}t_1+a_{2n}t_2+.....a_{mn}t_m \geq 1$

$t1,t2...tn \geq 0$

Čijim rješavanjem određujemo optimalne mješovite strategije za igrača **A**.

Za određivanje optimalnih mješovitih strategija igrača **B** uslove požemo predstaviti u obliku

$a_{11}y_1+a_{12}y_{2.}+....a_{1n}y_n \leq v$

$a_{21}y_1+a_{22}y_{2.}+....a_{2n}y_n \leq v$

....

$a_{m1}y_1+a_{m2}y_{2.}+....a_{mn}y_n \leq v$

$y1 + y2 +...+ym = 1$

Dijeleći nejednačine i jednačinu sa **v** dobijamo

$a_{11}u_1+a_{12}u_{2.}+....a_{1n}u_n \leq 1$

$a_{21}u_1+a_{22}u_{2.}+....a_{2n}u_n \leq 1$

....

$a_{m1}u_1+a_{m2}u_{2.}+....a_{mn}u_n \leq 1$

$u1 + u2 +...+um = 1/v$

Na osnovu toga model koji se koristi za određivanje optimalne mješovite strategije za igrača **B** možemo predstaviti u obliku

$(max)\ Z= u1 + u2 + ...+un$

$a_{11}u_1+a_{12}u_{2.}+....a_{1n}u_n \leq 1$

$a_{21}u_1+a_{22}u_{2.}+....a_{2n}u_n \leq 1$

....

$a_{m1}u_1+a_{m2}u_{2.}+....a_{mn}u_n \leq 1$